गणित – अधिगम और शिक्षण

D.El.Ed
(SHIKSHA SNATAK)

307

तृतीय सेमिस्टर

शिक्षा विभाग

उच्च शिक्षा और शोध संस्थान

दक्षिण भारत हिंदी प्रचार सभा, मद्रास

विषय–सूची

इकाई	अध्याय		पेज न.
इकाई–1	**गणित की प्रकृति**		**1–41**
	पाठ–1	गणित का स्वरूप	2–14
	पाठ–2	गणित के तत्व	15–27
	पाठ–3	भाषा का विकास	28–41
इकाई–2	**भिन्नात्मक संख्याएँ**		**42–104**
	पाठ–4	भिन्न की संक्रियाएँ	43–61
	पाठ–5	भिन्नों में सूत्र विधि पर चर्चा	62–83
	पाठ–6	दशमलव के रूप में व्यक्त भिन्नों पर चर्चा	84–105
इकाई–3	**मापन की समझ**		**105–137**
	पाठ–7	मापन की समझ	106–119
	पाठ–8	समय का मापन	120–137
इकाई–4	**गणित सीखना–सिखाना व गतिविधियाँ**		**138–197**
	पाठ–9	गतिविधियों से सीखना	139–151
	पाठ–10	सीखने की प्रक्रिया पर विभिन्न विचार	152–163
	पाठ–11	शिक्षण की प्रचलित प्रथाएँ	164–180
	पाठ–12	निरूपण	181–197
इकाई–5	**आँकड़ों का उपयोग और संभावना**		**198–223**
	पाठ–13	आँकड़ों से निष्कर्ष निकालना कैसे सिखाए	199–209
	पाठ–14	संभावना के बारे में सीखना	210–223
इकाई–6	**संख्याओं का वृहद स्वरूप**		**224–251**
	पाठ–15	ऋणात्मक संख्याएं	225–235
	पाठ–16	अंकगणित से बीजगणित की ओर	236–251
इकाई–7	**वैदिक गणित व भारतीय गणितज्ञ**		**252–262**
	पाठ–17	वैदिक गणित व भारतीय गणितज्ञ	253–262

इकाई – 1
गणित की प्रकृति

पाठ –1 गणित का स्वरूप

गणितीय विचार किस तरह विकसित होते हैं? – गणित की प्रकृति – गणितीय तरीके से सोचना।

पाठ – 2 गणित के तत्व

गणित क्या है – अमूर्तता को समझना – विशिष्टीकरण और व्यापकीकरण – व्यापक समझ की ओर कैसे बढ़े – प्रक्रिया का व्यापकीकरण – उपपत्ति क्या होती है? – कब मानेगे कि हमने सिद्ध कर दिया – कथन असिद्ध करना।

पाठ – 3 भाषा का विकास

गणित समझाने में भाषा की भूमिका – इबारती सवाल – गणित की भाषा सीखना।

हर विषय की प्रकृति अलग–अलग होती है जिसके अनुसार उस विषय को देखा, समझा जाता है गणित की प्रकृति में अमूर्तता, तार्किकता, विशिष्टता, क्रमबद्धता, सत्यता, प्रतीक आदि आते हैं। और हम इन सभी को गतिणीय अवधारणों के स्वरूप समझते हैं। तथा इन सभी के माध्यम से हम गणितीय तरीके से सोचना प्रारम्भ करते हैं शुरूआत में गणित को ठोस वस्तुओं, चित्रों द्वारा समझाया जाता है और धीरे–धीरे अमूर्तता की ओर बढ़ा जाता है।

दूसरी ओर गणित में तर्क ही आधार है और तर्क के बिना गह चाहे कितनी बड़ी उपलब्धि का साधन क्यों न बन जाय पर गणित नहीं रहेगा। गणितीय उपपत्ति में अपरिभाषित पद, गुण–धर्म, प्रमेय, तार्किक स्वयं–सिद्ध, प्रत्यक्ष–परोक्ष उपपत्ति आदि शामिल है। जिससे रेखागणित का विकास हुआ है।

गणित की अपनी एक भाषा हैं जो प्रतीकों, अवधारणाओं, शब्दों, एल्गोरिद्मों और व्याकरण से मिलकर बनी है। इस भाषा को तभी सीखा जा सकता है जब इसका इस्तेमाल किया जाता है।

इस सबक में हम इन्हीं बातों गणित के स्वरूप व तत्व जैसे अमूर्तीकरण, विशिष्टीकरण, व्यापीकीकरण तथा उपपत्ति के अर्थ तथा गणितीय भाषा के बारे में अध्ययन करेगे।

पाठ – 1
गणित का स्वरूप

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
  - मूर्त से अमूर्त तक
  - विशिष्ट से व्यापक तक
  - सोपानक्रमिक संरचनाएँ
- गणित की प्रकृति
- प्रतीकों का उपयोग
- गणितीय तरीके से खोजना
- सारांश

परिचय

हम सभी का जीवन में गणित से सामना हुआ है। इस दौरान कुछ लोगों को यह पसंद आया है; और इसलिए इसे करने मे उन्हें मजा आता है। लेकिन कुछ और लोगों को गणित, खास पसंद नहीं आता और वे इसे एक अप्रिय आवश्यकता के रूप में देखते हैं। एवं वहीं कुछ ऐसे भी लोग हैं जिनके गणित संबधी अनुभव कड़वे रहे हैं और इसलिए वे गणित से दूर ही रहते हैं।

(क) गणित! ना बाबा ना! (ख) गणित! अरे, वाह!

चित्र 1 : गणित के प्रति रवैये

इस पाठ में हम देखेंगे कि –

गणित में ऐसी क्या "खासियत" है कि यह लोगों में इतनी अलग–अलग भावनाएं पैदा करती है? क्या यह जरूरी है कि हर व्यक्ति इसे सीखे?

हम कुछ उदाहरणों और उनके विश्लेषण के द्वारा देखेंगे कि गणित का हम किस प्रकार प्रयोग करते हैं यह कितना जरूरी मनोंरंजक व मनोहर है तथा इसकी कुछ विशेषताओं को देखेंगे। इन्हीं विशेषताओं के कारण गणित जीवन के क्षेत्रों में लगातार और ज्यादा महत्वपूर्ण होता जा रहा है वह हमारे सोचने के तरीके को प्रभावित करता है।

उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- यह बता सकेंगे कि गणितीय संकल्पनाएँ किस प्रकार विकसित होती है।
- गणित की विशेषताओं को पहचान सकेंगे।
- गणितीय तरीके से सोचने का मतलब बता सकेंगे।
- उन आधारभूत क्षमताओं को पहचान सकेंगे जो गणित के सीखने से बच्चे में विकसित होती है।

गणितीय विचार किस तरह विकसित होते हैं ?

गणितीय अवधारणाओं के स्वरूप के तीन पहलु होते हैं मूर्त से अमूर्त की ओर, विशिष्ट से व्यापक की ओर तथा सोपानक्रमिक संरचनाएं। ये तीनों किसी भी क्षेत्र में ज्ञान की खोज में देखे जा सकते हैं।

मूर्त से अमूर्त तक (Concrete to abstract)

सभी ज्ञान की तरह गणित भी हमारे ठोस अनुभवों से विकसित होता है। जैसे– त्रिविम आकार में "गोलाई" या गोल की संकल्पना।

हम अपने चारों ओर कई तरह की वस्तएं देखते हैं। और हम पाते हैं कि उनमें से कुछ वस्तुएं जैसे गेंद, संतरा, तरबूज, लड्डू में एक ही प्रकार की नियमितता है, यानि गोलाई। और इस प्रकार हमारे दिमाग में "गोलाई" की अवधारणा धीरे–धीरे विकसित होती है।

हम गोल वस्तुओं को उन वस्तुओं से अलग कर सकते हैं जो गोल नहीं हैं। गोलाई का गुण, जो सब गोल वस्तुओं में होता है, इन वस्तुओं के अन्य गुणों ,जैसे जिन पदार्थों से वे बने हैं, उनके आकार या उनके रंग, से संबंधित नहीं हैं। धीरे–धीरे हम गोलाई की अवधारणा को उन मूर्त (ठोस) वस्तुओं से अलग करने लगते हैं जिनसे उसे प्राप्त किया गया है। गोलाई के मूलभूत गुण के आधार पर हम गोले की अवधारणा को विकसित करते हैं। एक बार जब हम यह अवधारणा बना लेते हैं तो गोले की बात करते समय हमें किसी विशेष गोल वस्तु के बारे में सोचने की जरूरत नहीं पड़ती है। हमने इस अवधारणा को अपने मूर्त अनुभवों से सफलतापूर्वक अमूर्त (abstract) स्तर पर प्राप्त कर लिया है।

इसी प्रकार, हम "लालपन" की अवधारणा भी प्राप्त करना सीखते है। लेकिन इस अवधारणा और गणितीय अवधारणा में एक बहुत बड़ा अंतर है।

(i) प्रत्येक गणितीय अवधारणा से अन्य गणितीय अवधारणाएं जनित होती है। जैसे– गोले की अवधारणा से संबधित हम त्रिज्या, केंद्र, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन की अवधारणाएं जनित करते है।

(ii) संबंधित अवधारणाओं के बीच पूरी तरह अमूर्त और औपचारिक संबंध के बारे में हम सोच सकते है। जैसे–गोले और उसके आयतन के बीच के संबंध को देखिए। चाहे गोले का आकार कुछ भी हो या वह किसी भी पदार्थ का बना हो, संबंध वही रहता है। गोले का आयतन सिर्फ उसकी त्रिज्या पर निर्भर करता है, चाहे गोला कितना भी बडा या छोटा हो।

इस तरह हम मूर्त वस्तुओं से अमूर्त गणितीय अवधारणा प्राप्त कर सकते है। साथ ही, हम और भी संबंधित अमूर्त विचार उत्पन्न कर सकते हैं, और सैद्धांतिक रूप से हम उनके बीच के संबंध का अध्ययन कर सकते हैं।

ये अमूर्त गणितीय विचार हमारे दिमाग में बस जाते हैं उन मूर्त अनुभवों से स्वतंत्र जिनसे ये जनित हुए। ये विचार बहुत सी संबधित अमूर्त अवधारणाएं और उनके बीच के संबंधो को जन्म दे सकते हैं। विचारों और संबंधों की इमारत बढती रहती है, और हमारे अमूर्त संसार को और बड़ा बनाती जाती है।

E 1) क्या संख्या की अवधारणा भी इसी प्रकार विकसित हुई है? यदि हां तो कैसे

विशिष्ट से व्यापक तक (Specific to General)

जब मैं कहती हूँ "पूंछ", तो आपके आंखों के सामने कौन सी तस्वीर आती है? घोडे की पूंछ की, या बंदर की पूंछ की? या आपको अपने पालतू कुत्ते की पूंछ दिखती है?

किसी विशिष्ट जानवर की पूंछ में बहुत सी ऐसी विशेषताएं होती है जो "पूंछ" की अवधारणा में नहीं है। जैसे– मेरे घोडे की दो फुट लम्बी काली पूंछ है। मैं उसके बालों को मोटाई, उसके रंग, वह कोण जो वह शरीर के साथ बनाती है, आदि बता सकती हूँ। लेकिन क्या वह बातें किसी भी घोडे की पूंछ के लिये सही होंगी? क्या इनमें से कुछ विशेषताओं को अलग अलग घोडों के लिए बदलने की आवश्यकता नहीं होगी? इसलिए, अगर मै इस अवधारणा को सब घोडों पर लागू करना चाहती हूँ, तो मुझे घोडें की पूंछ की ऐसी तस्वीर बनानी होगी, जो केवल मेरे घोड़े की पूंछ की विशेषताओ तक सीमित न हो।

अब, मैं पाती हूँ कि गायों और कुत्तों के शरीरों पर भी ऐसी ही वस्तुओं होती है। इसलिए, अपनी अवधारणा में सब जानवरों की पूंछों को शामिल करने के लिए मैं इसे और भी व्यापक बनाती हूँ। इसलिए, एक विशिष्ट स्थिति से लेकर और ज्यादा स्थितियों को शामिल करने के लिए अवधारणा को व्यापक बनाते समय, हम विशिष्ट स्थिति के कुछ गुणों को छोड देते हैं और उन गुणो को चुनते है जो सभी उदाहरणों में हैं। हम उनके इन सामान्य गुणों से व्यापक अवधारणा बनाते हैं।

क्या यह वही तरीका नहीं है जिससे हम चतुर्भुज की अवधारणा बनाते हैं? हम वर्गों, आयतों, समलबं, इत्यादि को जांचते हैं, और वे गुण चुनते है जो सब में पाए जाते हैं, यानि कि ये सभी चार भुजाओं वाली बंद आकृतियां हैं। इस प्रकार, हम चार भुजाओं की बंद आकृति की व्यापक अवधारणा बनाते है, और ऐसी किसी आकृति को चतुर्भुज कहते हैं।

चित्र 2 : विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज

E 2) त्रिभुज की व्यापक अवधारणा किस प्रकार बनती है? समझाइए।

E 3) विशिष्ट से व्यापक की ओर बढने की प्रक्रिया को दर्शाने के लिए प्राकृत संख्याओ और भिन्नो से संबंधित एक–एक उदाहरण लिखिए।

E 4) क्या विशिष्ट से व्यापक की ओर जाना वैसा ही है जैसे मूर्त से अमूर्त की ओर जाना? क्यों?

सोपानक्रमिक संरचनाएं (Hierarchical Structure)

जैसे–जैसे मूर्त वस्तुओं और पदार्थों से प्राप्त अमूर्त विचार व्यापक होते जाते हैं, वैसे–वैसे उनमें शामिल अवधारणाओं का भी विस्तार होता जाता है। अगर हम व्यापकता की प्रक्रिया के हर चरण को लिखते जाएं तो हमें विचारों की एक शृंखला मिलेगी, जिसमें हर अवधारणा उससे अगली (ज्यादा व्यापक) अवधारणा में शामिल होगी।

जैसे– संख्या पद्धति

1) मूर्त वस्तुओं को गिनने से हमें प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $N = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ प्राप्त होता है।

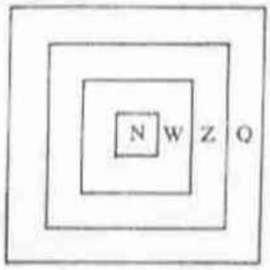
2) अगर प्राकृत संख्याओं के समुच्चय में हम शून्य को शामिल करें तो हमें पूर्ण संख्याओं का समुच्चय $W = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ प्राप्त होता है।

3) पूर्ण संख्याओं के समुच्चय में ऋणात्मक संख्याओं को शामिल करके और बढाया जा सकता है, और तब हमें $Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ पूर्णांकों का समुच्चय प्राप्त होता है।

4) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q प्राप्त करने के लिए पूर्णांकों के समुच्चय में हम धनात्मक और ऋणात्मक भिन्नों को शामिल करते हैं।

$$Q = \left\{ \ldots\ldots\ldots -1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \ldots\ldots\ldots \right\}$$

अब अगर मैं यह नहीं जानती कि प्राकृत संख्याओं का क्या मतलब है, तो मैं पूर्ण संख्याओं को कैसे समझ पाऊंगी? इसी प्रकार, यदि मैं पूर्ण संख्याओ का मतलब नहीं समझ पाती, तो मुझे नहीं लगता मै समझ लूंगी कि परिमेय संख्याएं क्या हैं? इसलिये, इसमें से प्रत्येक अमूर्त अवधारणा को समझने की जरूरत है।



चित्र–3 : संख्या पद्धति में सोपानक्रम

E5) गणित की तीन सोपानक्रमिंक शृंखलाएं लिखिए। इसके लिए आप संख्याओं पर संक्रियाओं, ज्यामिति और बीजगणित से संबंधित उदाहरणों को ले सकते हैं।

अवधारणाओं के सोपानक्रम का अवधारणाओं को सीखने के तरीके से गहरा संबंध भी होता है। अगर हम किसी अवधारणा के ऐतिहासिक विकास को देखें तो ज्यादातर सोपनक्रम में नीचे आने वाली अवधारणाएं सोपानक्रम में ऊपर आने वाली अवधारणाओं से पहले आती है। बच्चे भी अवधारणाओं को लगभग इसी प्रकार ग्रहण करते है। इसलिए, बच्चों को विचारों के सोपानक्रम से ज्यादातर उसी क्रम में परिचित कराना अच्छा होगा जिस क्रम में वे विकसित हुए हैं। पर हमेशा ऐसा नहीं होता है।

जैसे– वर्ग एक विशेष प्रकार का आयत है और आयत एक विशेष प्रकार का समांतर चतुर्भुज (parallelogram) है। लेकिन बहुत से बच्चों को कक्षा 3 में हुई आकृतियों के बीच का संबंध बताए बगैर इन्हें एक साथ ही सिखा दिया जाता है। जिस कारण बच्चे वर्ग को समान्तर चतुर्भुज नही मानते।

इसलिए किसी भी नए विचार को अच्छी तरह से समझने के लिए, उससे पहले आने वाले गणितीय विचारों को अच्छी तरह समझना जरूरी है। जैसे– गणित सोपानक्रमिक तरीके से संरचित ज्ञान क्षेत्र है।

E6) गणित की सोपानक्रमिक संरचना एक कारण है जिसकी वजह से इसे पढना/पढाना कठिन समझा जाता है। क्या आप इस कथन से सहमत हैं? क्यों?

गणित की प्रकृति

(1) गणितीय कथन असंदिग्ध होते हैं

किसी ऐसी गणितीय संकल्पना पर विचार कीजिए जिससे आप परिचित हैं जैसे गोल। गोल की परिभाषा स्पष्ट और सुनिश्चित (precise) है। यदि कोई वस्तु दी गई हो तो आप यह निश्चित रूप से बता सकते हैं कि वह गोला है या नहीं। इसी प्रकार, गणित में किसी भी संकल्पना की परिभाषा या कोई गणितीय कथन बिल्कुल असंदिग्ध (unambiguous) होता है, यानि संदेह की कोई गुंजाइश नहीं रहती है। ऐसा इसलिए है क्योंकि गणित के इस अमूर्त संसार को हम औपचारिक रूप से बनाते हैं, कुछ संगत अभिगृहितों (axioms) को मान कर। फिर इन अभिगृहीतों के आधार पर, हम कुछ अवधारणाओं को औपचारिक तरीके से स्पष्ट और परिशुद्ध रूप से परिभाषित करते हैं। जब एक बार अभिगृहितों को चुन लिया जाता है और स्थिति को परिभाषित कर दिया जाता है तो अस्पष्टता की गुंजाइश नहीं रहती है।

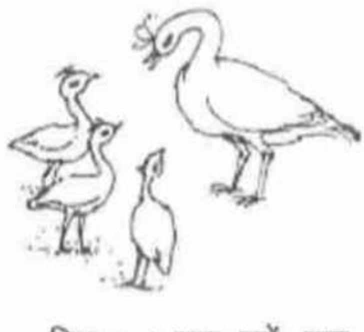
हां, अक्सर जब हम गणितीय शब्दों को वास्तविक जीवन में इस्तेमाल करते है तो हम उन्हें गणितीय परिभाषा के अनुसार इस्तेमाल नहीं करते हैं। ऐसा करने से हो सकता है कि उस शब्द का इस्तेमाल सुनिश्चित रूप से न हो। जैसे– हम दैनिक जीवन में 'आधे' शब्द का प्रयोग लगभग दो बराबर भागों में बंटी हुई वस्तुओं के लिए करते है। परन्तु गणित में 'आधा' शब्द हमेशा दो बराबर भागों में ही बंटी वस्तुओं के लिए ही प्रयोग किया जाता है। जैसे कि हम एक आम जिन्दगी का एक उदाहरण ले सकते हैं– अगर हमें कोई आधा गिलास पानी या दूध लाने कहता है तो हम अनुमान से आधा लाते हैं परन्तु गणित में कुछ भी अनुमानित नहीं होता है।

E7) ऐसे और उदाहरण लिखिए जिनमें गणितीय शब्दों को अशुद्ध रूप से दैनिक जीवन में प्रयोग किया गया हो। उन उदाहरणों को चुनने का कारण भी बताइए।

(2) सत्यता की कसौटी

निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए :

1) मोरनी सितम्बर के आसपास अंडे देती है।
2) पानी 100° सें. पर उबलता है।
3) 15, 5 से पूर्णतः विभाजित होता है।
4) यदि आप दो विषम संख्याओं को जोडें तो परिणाम हमेशा एक सम संख्या होता है।



चित्र 4 : याद रखें, याद रखे, अंडे दे सितम्बर में।

यदि हम देखना चाहते हैं कि ये कथन सत्य हैं या नहीं। तो हम उनकी जांच कैसे करेंगे? क्या एक ही तरीका सब कथनों को जांच करने के लिए काम करेगा?

पहली परिकल्पना (hypothesis) की जांच केवल आनुभाविक (empirical) तरीके से की जा सकती है। अर्थात् हमें मोरनियों को देखना होगा और पता लगाना होगा कि वे कब अंडे देती हैं। यदि हम बहुत सी मोरनियों को देखें और यह पाएं कि उनमें से लगभग सब सितम्बर के आसपास अंडे देती है, तो हम कह सकते हैं कि मोरनियां सितम्बर के आसपास अंडे देती है। अगर कुछ इक्के–दुक्के उदाहरण ऐसे भी हों जो इस नियम का पालन नहीं करते हो तब भी आनुभाविक नियम मान्य रहेगा।

आप खुद ही प्रयोग (experiment) करके यह जांच कर सकते है कि दूसरा कथन केवल कुछ विशिष्ट परिस्थितियों में सत्य है। अधिक दबाव में पानी को गर्म करने पर इसे 100° सें. से बहुत अधिक तापमान पर उबालकर दिखाया जा सकता है। (यह वही सिद्धातं है जिसे 'प्रेशर कुकर' में प्रयोग किया जाता है।)

तीसरा कथन एक गणितीय कथन है। इसे हम केवल अवलोकन (observation) से सिद्ध कर सकते हैं। आप 15 वस्तुओं के समुच्चय के बहुत से उदाहरण ले सकते हैं और उन्हे 5 बराबर हिस्सों में बांट सकते हैं। लेकिन हमें 15 वस्तुओं के सब समुच्चयों के लिए इसे सिद्ध करने की आवश्यकता है। अगर हम 5, 15, भाग और शेष को समझते हैं, तो हम इसे गणितीय तर्क से सिद्ध कर सकते हैं।

गणित में सत्यता केवल संगति (consistency) और तर्क से जुडा है। किसी भी गणितीय कथन की उपपत्ति तर्कों की श्रेणी से बनती है। ये तर्क कुछ स्वीकृत नियमों, परिभाषाओं और मान्यताओं के अनुसार लागू किये जाते हैं।

क्या हम कथन 4 को आनुभाविक तरीके से सिद्ध कर सकते हैं? यदि हां, तो आप विषम संख्याओ के सभी युग्मों को कैसे जांच करेंगे? जब तक विषम संख्याओं के सभी संभव जोड़ों की जांच नहीं कर लेते आपकी परिकल्पना को गणितीय नियम के रूप मे स्वीकार नहीं किया जाएगा। मान लीजिए, आपने इसकी जाचं बहुत सारे उदाहरणों के लिए कर ली। लेकिन कोई पूछ सकता है कि क्या यह 3567894732987 और 1000042001293 के लिए सही है? इसलिए जब तक औपचारिक रूप से विषम संख्याओं के व्यापक युग्म के लिए सिद्ध नहीं किया जाता, परिणाम गणितीय रूप से स्वीकृत नहीं होगा।

परिणाम को सिद्ध करने का एक तरीका यह है :

माना n कोई संख्या है तो सम संख्या $=2n$ (2 की गुणज या 2 से विभाजित होने वाली)

विषम संख्या = $2n+1$

माना दो विषम संख्या $2n_1+1$ और $2n_2+1$ है। जहां n_1 और n_2 पूर्ण संख्या है।

दो विषम संख्याओं का योग

$$=(2n_1+1)+(2n_2+1)$$
$$=2n_1+2n_2+1+1$$
$$=2n_1+2n_2+2$$
$$=2(n_1+n_2+1)$$
$$=2m \text{ (जहाँ पर } m=n_1+n_2+1)$$

यहाँ $2m$ एक सम संख्या है जो 2 से भाज्य है।

इस प्रकार दो विषय संख्याओं का योग संख्याा होती है।

यहां हमने परिभाषाओं (विषम, सम, पूर्ण संख्या) पहले से प्राप्त परिणामों (पूर्ण संख्याओं का योग हमेशा एक पूर्ण संख्या होता है) व तर्क का इस्तेमाल किया है। यहां कोई अवलोकन नही है। यदि कोई इन परिभाषाओं और पहले से प्राप्त परिणामों को नहीं जानता हो, तो वह इस उपपत्ति को समझ नहीं पाएगा।

निगमन क्या है :

इस प्रकार के तर्क को, जिसमें ज्ञात परिणामों, परिभाषाओं और निष्कर्ष के नियमों का प्रयोग किसी वस्तु को सिद्ध करने के लिए किया जाता है, **निगमनिक तर्क (deductive logic)** कहलाता है। इस प्रकार का तर्क किसी ऐसे व्यापक कथन या परिभाषा से शुरू होता है जिसे बिना किसी संदेह के स्वीकार किया जाता है, और इससे उपपत्ति के अगले चरण को निगमन किया जाता है। जैसे– हम निम्नलिखित कथनों को स्वीकार करते है:

(क) "सभी इंसान नश्वर है।" और

(ख) "राघव एक इंसान है।"

तो (क) और (ख) से हम इस निष्कर्ष पर पहुंचने पर मजबूर हो जोते है कि "राघव नश्वर है"।

गणित में प्रयोग किए जाने वाले दूसरे प्रकार के तर्क को आगमनिक तर्क (inductive logic) कहते है। जैसे– मैं एक कुत्ते को देखती हूं और पाती हूं कि उसकी एक पूंछ है। मैं एक दूसरे कुत्ते को देखती हूं और पाती हूं कि उसकी भी एक पूंछ है। यह तीसरे और चौथे कुत्ते के लिए भी सत्य है, और इसी प्रकार बहुत सारे कुत्तो के लिए भी। इसलिए मैं यह निष्कर्ष निकालती हूं कि सब कुत्तों की एक पूंछ होती है। यह मोरनी द्वारा सितम्बर में अंडे दिए जाने वाले कथन की उपपत्ति की तरह है।

इस प्रकार का तर्क केवल यह करता है कि कथन के सत्य होने की प्रायिकता (probability) काफी है। लेकिन यह सिद्ध नहीं होता कि हमें बिना पूंछ का कुत्ता कभी मिलेगा या हमें ऐसी मोरनी कभी नहीं मिलेगी जो मार्च में अंडे देगी।

E8 अपने आसपास इसी तरह के निगमन के उदाहरण सोचें।

लेकिन गणितज्ञों को इस प्रकार के तर्क को इस्तेमाल करने की जरूरत है जो किसी कथन को सभी स्थितियों में सिद्ध करे। इसलिए, वे एक विशेष प्रकार का आगमनिक तर्क प्रयोग करते हैं। इसे **गणितीय आगमन (mathematical induction)** कहते हैं। उदाहरण :

मान लीजिए हम सिद्ध करना चाहते हैं कि पहली n प्राकृतिक संख्याओं का जोड $\frac{n(n+1)}{2}$ होता है, जहां n कोई प्रकृतिक संख्या है, अर्थात्

$$1+2+3 \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(i) पहले हम यह सिद्ध करते हैं कि कथन $n = 1$ के लिए सत्य है।

(ii) फिर हम यह सिद्ध करते हैं कि यदि कथन को $n = 1$ के लिए सत्य मान लिया गया हो, तो वह $(m+1)$ के लिए सत्य होगा, यहां m कोई भी प्राकृतिक संख्या है।

ध्यान दीजिए कि यहां हम यह नहीं कह रहे यह m के लिए सत्य है। हम कह रहे है कि यदि यह m के लिए सत्य है, तो यह (m+1) के लिए भी सत्य होगा।

अब यदि (i) और (ii) दोनों संतुष्ट हो तो हम कह सकते है कि यह 1 के लिए सत्य है, और जब यह m के लिए सत्य है तो यह m + 1 के लिए भी सत्य होगा। अब चूंकि यह m = 1 के लिए सही है, तो यह m + 1 = 1 + 1 = 2 के लिए सही है। चूंकि यह 2 के लिए सही है तो यह 2 + 1 = 3 के लिए सही है, और इसी प्रकार आगे भी । चूंकि m के मान की कोई सीमा नहीं है (जब तक यह एक प्राकृत संख्या है), हमने कथन को सब प्राकृत संख्याओं के लिए सिद्ध कर दिया है। यह गणितीय आगमन की विधि है।

आइए, अब हम इसका प्रयोग यह सिद्ध करने के लिए करें के पहले n प्राकृतिक संख्याओं का योग $\frac{n(n+1)}{2}$ होता है।

1) n = 1 के लिए, कथन

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1 = \frac{1\ (1\ +\ 1)}{2}$$

$$= \frac{1 \times 2}{2}$$

= 1 जो सत्य है।

इसलिए n = 1 के लिए कथन सत्य है।

2) अब हम इसे n = m के लिए सत्य मान लेते है, जहां m एक प्राकृतिक संख्या है। अर्थात हम यह मान लेते हैं कि

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

दोनो तरफ (m + 1) जोडने पर, हम पाते है कि

$$1 + 2 \ldots. + m + (m + 1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m + 1)$$

$$= \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2}$$

$$= \frac{(m+1)\ (m+2)}{2}$$

इस प्रकार $1 + 2 + 3 + \ldots.. + (m + 1) = \frac{(m+1)\ (m+2)}{2}$ या $\frac{(m+1)\ [(m+1)+1]}{2}$

अतः कथन (m + 1) के लिए भी सही है।

तो हमने दिखाया कि अगर यह m के लिए सत्य है, तो यह (m + 1) के लिए भी सत्य है। अतः गणितीय आगमन द्वारा हम यह निष्कर्ष निकालते है कि

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$, सभी प्राकृतिक संख्याओं n के लिए सत्य है।

इस तरह से आगमनिक तर्क गणितीय परिणामों को सिद्ध करने के लिए प्रयोग किया जाता है।

E8) अपने गणित के अनुभव से गणितीय कथनों को सिद्ध करने में आगमनिक और निगमनिक तर्क के प्रयोग का कम से कम एक–एक उदाहरण दीजिए।

अब निम्नलिखित कथन पर विचार कीजिए : "अभाज्य संख्या (prime number) के वर्ग के कम से कम 4 गुणनखंड है।" इसे आप कैसे सिद्ध या असिद्ध करेंगे? चूंकि कथन को सब अभाज्य संख्याओं के लिए सत्य होना चाहिए, इसलिए यह किसी भी विशिष्ट संख्या के लिए भी सत्य होना चाहिए। आइए देखें कि क्या यह 7 के लिए सही है।

7 X 7 = 49 होता है, और 49 के गुणनखंड 1, 7, 49 है। इसलिए कथन 7 के लिए गलत है। अतः 7 एक प्रति उदाहरण (counter-example) है और यह दिखाता है कि कथन असत्य है।

उदाहरण द्वारा कथनों को सिद्ध या असिद्ध करने के हमारे तरीकों के अंतर पर ध्यान दीजिए। जब हम किसी कथन को सिद्ध कर रहे थे, तो हम यह दिखाना चाहते थे कि यह सभी स्थितियों में सही है। लेकिन किसी कथन को असिद्ध करने के लिए केवल एक उदाहरण काफी है।

E9) निम्नलिखित कथनों को सिद्ध या असिद्ध कीजिए:

1) चतुर्भुज के अंतःकोणों (interior angles) का योग 360° होता है।

2) पंचभुज के अंतःकोणों का योग 450° होता है।

प्रतीकों का प्रयोग

"सात हजार छः सौ तिरेपन को चार हजार नौ सौ इक्यासी से गुणा कीजिए।" संख्याओं को अंकों में लिखे बगैर, अर्थात 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग किए बगैर इसे हल करने की कोशिश कीजिए। ऐसे में प्रश्न को समझना भी एक समस्या है। दूसरी तरफ, अगर मै लिखूं 7653 X 4981 = ? तो क्या प्रश्न को समझना आसान नहीं हो जाता? यह आसानी प्रतीकों (symbols) के प्रयोग की वजह से हुई है।

अन्य उदाहरण : "सात और आठ के योग को उसी योग से गुणा करने पर जो प्राप्त होता है वह आठ को आठ से और सात को सात से गुणा करने पर और सात और आठ के गुणनफल के दुगने के योग के बराबर होता है।"

क्या आपको कुछ समझ आया? अब इसे देखिए –

$$(7 + 8)^2 = 7^2 + 8^2 + (2 \times 7 \times 8) \qquad [(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$$

यह प्रतीको से लिखा गया वही कथन है। यह प्रतीकात्मक निरूपण कथन को संक्षिप्त और स्पष्ट बनाता है, बशर्ते पढ़ने वाला प्रतीकों को समझ सके और उनके प्रयोग से बने कथनों को पढ़ सके।

आप जानते है कि गणित ऐसे अमूर्त विचारों से संबंध रखता है जो कि सुनिश्चित और असंदिग्ध होते हैं। इन संकल्पनाओं को इस्तेमाल करने के लिए और उन्हें दूसरों को सफलता से बताने के लिए, हमें संकेतों के सामान्य निकायों और उन्हें इस्तेमाल करने के सामान्य नियमों को इस्तेमाल करने की जरूरत है। इन निकायों से गणित की शक्ति बढ़ती है, और ये हमें आसानी से यह देखने का मौका देते हैं कि कोई गणितीय तर्क मान्य है या नहीं।

```
    1026
 5)5132
   5
   ---
    13
    10
   ---
     32
     30
   ---
      2
```

चित्र 5 : सिर्फ ऐल्गोरिद्म को सीखना गणित सीखना नहीं है।

विभिन्न संक्रियाओं के लिए गणितीय प्रतीकों के प्रयोग से उन संक्रियाओं के लिए ऐल्गोरिद्मों (algorithm) को लागू करना आसान हो जाता है। लेकिन प्रतीक और ऐल्गोरिद्म संक्रियाओं को सरल और तेज बनाते हैं वे इसे मशीनी भी बनाते हैं। गणित पढाते या सीखते समय, अक्सर बिना यह समझे कि हम क्या व क्यों कर रहे हैं, हम संक्रियाओं को मशीनी रूप से करना सीख जाते हैं, और वही करने लगते हैं।

ऐल्गोरिद्म : किसी सवाल को हल करने के लिए एक विशेष क्रम में लागू की जाने वाली चरणों की शृंखला

जैसे– 5132 ÷ 5 हममें से ज्यादातर लोग इसको चित्र 5 मे दिखाए गए तरीके से करेंगे। लेकिन हममें से कितने लोग यह पूछतें है कि :

(क) 5 को 5132 के नीचे इस प्रकार ही क्यों लिखते है?

(ख) तीसरी लाइन में 13 कैसे आया और क्यों?

(ग) वहां पर 13 लिखने के लिए भाज्य में 0 लिखने के मुझे क्यों जरूरत है?

मैं शायद इन प्रश्नों या इन जैसे बहुत से दूसरे प्रश्नों के उत्तर नहीं दे संकू। फिर भी मैं सवाल को सही तरह से हल कर सकूंगी।

यह बात गणित पढाने में सबसे गंभीर समस्या खड़ी करती है। अधिकतर शिक्षक खुश हो जाते हैं यदि बच्चे ऐल्गोरिद्म को अच्छी तरह से सीख जाएं, चाहे उन्हे यह पता भी न हो कि ऐल्गोरिद्म से सही उत्तर क्यों मिलते है। लेकिन पढ़ना सीखने के इस तरीके से बाद में बच्चों को गणितीय अवधारणाओं को समझने में बहुत मुश्किल होती है।

E10) आप निम्नलिखित में से कौन से तरीके में विश्वास करतें है, और क्यों?

1) बच्ची के ऐल्गोरिदम सीखने से पहले, उसे उसमें शामिल गणितीय अवधारणा को सीखना चाहिए।

2) बच्ची को ऐल्गोरिदम के प्रयोग का काफी अभ्यास देना चाहिए, उसे उसमें शामिल गणित को समझाए बगैर।

3) कभी कभी (1) सही तरीका है, और कभी कभी (2)

अभी तक हम गणित की प्रकृति को समझने का प्रयास कर रहे थे। आइए अब हम देखें कि गणित करने से हमारे सोचने की प्रक्रियाएं किस प्रकार बदलती है।

गणितीय तरीके से सोचना

क्या आपने कभी सोचा है कि जब आप गणित का कोई प्रश्न हल कर रहे होते हैं तो आप किन मानसिक प्रक्रियाओं से गुजर रहे होते हैं? निम्नलिखित प्रश्न को हल कीजिए और करते वक्त उन गणितीय प्रक्रियाओं को ध्यान से देखिए जिनसे आप गुजर रहे हैं।

प्रश्न– किन्हीं दो धनात्मक संख्याओं के समांतर माध्य (arithmetic mean, AM) और गुणोत्तर माध्य (geometric mean, GM) के बीच के संबंध को मालूम करना है।

आप इसे कैसे करेंगे? (अगर आप संख्याओं के कुछ विशिष्ट युग्मों पर विचार करके करेंगे तो आप विशिष्टीकरण (specialisation) कर रहे है।)

अब मान लीजिए आप 1 और 3 लेते है। 1 और 3 का $AM, \frac{1+3}{2}=2$ है। 1 और 3 का $GM,\ \sqrt{1\times 3}=\sqrt{3}$ है। बहुत से युग्मों को लेकर, गणना करने पर निम्न सारणी मिलती है।

संख्या युग्म	समान्तर माध्यम (AM)	गुणोत्तर माध्यम (GM)
(1, 3)	2	$\sqrt{3}$
(2, 2)	2	2
(3, 27)	15	9
(20, 25)	$\frac{45}{2}$	$10\sqrt{5}$

क्या आपको कोई पैटर्न (pattern) दिखाई देता है जिससे आप किसी नियम का अनुमान (conjecture) लगा सकते हैं यह व्यापक नियम AM $\geq$ GM है। इसके लिए आपको जांच करनी होगी कि क्या आपका व्यापकीकरण (generalisation) सही है। इसका मतलब है कि आपको अपने अनुमान को सिद्ध करना होगा। आप को कुछ पूर्वधारणओं (assumptions) से शुरू करने की आवश्यकता है और चरणों की श्रेणी से, जिसमें हर चरण पिछले से तार्किक रूप से प्राप्त होता है, अपने परिणाम तक पहुंचना होगा।

इसको सिद्ध करने के बहुत से तरीके हैं। एक तरीका है कि आप कोई दो धनात्मक संख्याएं x और y ले सकते हैं। अब, क्या आप देखना चाहतें है कि $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ होगा।

यह सत्य होगा यदि और केवल यदि

$(x + y) \geq 2\sqrt{xy}$ (दोनों तरफ 2 से गुणा करने पर) जो सत्य होगा यदि और केवल यदि

$(x + y)^2 \geq 4xy$, (दोनों तरफ वर्ग करने पर) जो सत्य होगा यदि और केवल यदि

$x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy$, $[(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$ जो सत्य होगा यदि और केवल यदि

$x^2 + y^2 + 2xy - 4xy, \geq 0$ (पक्षान्तरण करने पर)

$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$, जो सत्य होगा यदि और केवल यदि

$(x - y)^2 \geq 0$, $[(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab)]$

और यह हमेशा सत्य होता है क्योंकि किसी भी संख्या का वर्ग हमेशा धनात्मक होता है।

अतः आपने यह व्यापक नियम सिद्ध कर दिया कि किन्हीं दो धनात्मक संख्याओं का AM उनके GM के या तो बराबर या उससे बडा होता है? क्या ऐसा कथन तीन धनात्मक संख्याओं के लिए भी सत्य होगा या दो ऋणात्मक संख्याओं के लिए?

ऐसा भी हो सकता है कि कभी आप ऐसा अनुमान लगाएं जो सही नहीं हो। जैसे– मान लीजिए कि आपने शुरू में युग्मों (1, 1), (2, 2), (3, 3), ... के लिए AM और GM के मान प्राप्त किए थे। तब आप यह अनुमान लगा सकते थे कि, AM = GM, लेकिन तब इसकी जांच के लिए आप (1, 3) के लिए इसको आजमा सकते थे, और आप पाते कि आपका अनुमान सही नहीं है। इसलिए आपको इसे बदलने की, और अपना गणितीय तर्क दुबारा से प्रस्तुत करने की जरूरत होती।

अतः आप समस्या उठाने और समस्या हल करने की प्रक्रिया में आप निम्न प्रकार से गणितीय तरीके से सोच रहे थे।

विशिष्टीकरण → {अनुमान लगाना व्यापकीकरण} → सिद्ध/असिद्ध करना

E11) किसी भी बिंदु से गुजरते हुए बहुत से वृत्त खींचे जा सकते है। पर कितने? दो, या तीन, या चार, या ....

क) इसे हल करने का प्रयास कीजिए और उन प्रक्रियाओं को नोट कीजिए जो आप इस्तेमाल करते हैं।

ख) अपने तर्क को विकसित करते समय गणित के कौनसे गुण नजर आए? व किस प्रकार?

प्रश्नों को हल करने का प्रयास यानी क्षमता वर्धन :

गणितीय प्रश्नों को हल करने से किसी व्यक्ति की निम्नलिखित क्षमताएं बढती है :

- सुनिश्चित रूप से सोचने की क्षमता
- स्पष्ट तरह से व्यक्त करने की क्षमता
- तार्किक और क्रमबद्ध तरीके से सोचने की क्षमता
- पैटर्नों और संबंधों को तलाशने की क्षमता।

यदि ये क्षमताएं अच्छी तरह से विकसित हों तो हमारी अन्य वास्तविक जीवन की परिस्थितियों में भी बहुत सहायता करती हैं। इसलिए, इन मानसिक क्षमताओं को बचपन से ही विकसित करना चाहिए।

एक समस्या! इसका हल!... अरे वाह! बात बन गई!

चित्र 6 : गणितीय तरीके से सोचने की क्षमता हमें अपने दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में मदद करती है।

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित बिन्दुओं पर विचार किया –

1. गणितीय विचार ज्यादातर मूर्त परिस्थितियों से अमूर्त अवधारणाओं की ओर तथा विशिष्ट स्थितियों से व्यापक विचारों की ओर बढ़ते है।
2. गणितीय ज्ञान का ढांचा सोपानक्रमिक तरीके से बनता है और व्यापक रूप में इसी प्रकार ग्रहण किया जाता है।
3. गणितीय कथन और परिभाषाएं सुनिश्चित, स्पष्ट और असंदिग्ध होते हैं।
4. किसी गणितीय कथन को सिद्ध करने के लिए उसे सभी स्थितियों के लिए सिद्ध करना होगा। अगर यह एक भी स्थिति में सही नहीं है, तो यह बिल्कुल सही नहीं है।
5. प्रतीकों का विस्तृत प्रयोग ही गणित को संक्षिप्त, स्पष्ट और एक शक्तिशाली, संचार का माध्यम बनाता है।
6. गणित में किसी ऐल्गोरिद्म की स्वीकार करने और प्रयोग करने से पहले आपको उसके पीछे के तर्क को समझने की जरूरत है।
7. गणितीय सोच में समस्याएं हल करना और नई समस्याएं प्रस्तुत करना शामिल होता है। समस्याएं हल करने के लिए सुनिश्चित तरह से सोचने की और तार्किक विचार की कुशलता की जरूरत होती है।
8. किसी बच्चे को समस्या हल करने की स्थिति में रखकर उसमें जो कुशलताएं विकसित की जाती है, वह उसे वास्तविक जीवन की परिस्थितियों में भी तर्क संगत तरीके से सोचने के काबिल बनाती है।

पाठ – 2
गणित के तत्व

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- गणित क्या है?
- अमूर्तता को समझना
- विशिष्टीकरण व व्यापकीकरण
- उपपत्ति क्या होती है?
- सारांश

परिचय

इस पाठ में हम गणितीय सोच में शामिल प्रक्रिया तथा बच्चों को गणित सिखाते समय जिन क्षमताओं के विकास पर जोर देना चाहिए उन्हें देखेंगे। आजकल आम तौर पर कक्षाओं में गणित सीखने–सिखाने को मशीनी तौर पर गणना करने और ऐल्गोरिद्म लागू करने तक सीमित कर दिया जाता है। हममें से बहुत से लोग किसी ऐल्गोरिद्म में शामिल तर्क को जाने/समझे बिना उसको मशीनी तौर पर लागू करते हैं। इस पाठ के जरिए हम ऐल्गोरिद्म में छुपी गणितीय अवधारणाएं व गणित के किसी भी विषय को पढ़ाते समय जिन पहलुओं पर वास्तव में जोर देना चाहिए, उनको देखेंगे।

गणित की दुनिया अमूर्त वस्तुओं और उनके बीच संबंधों की दुनिया है। अतः हम अमूर्तीकरण का अर्थ तथा इस दुनिया को समझने और विकसित करने में शामिल सबसे महत्वपूर्ण प्रक्रियाओं की बात करेंगे। ये प्रक्रियाएं हैं – विशिष्ट स्थितियों का व्यापकीकरण तथा व्यापक कथनों और स्थितियों का विशिष्टीकरण। अंत में हम उपपत्ति, और गणित के संदर्भ में इसके महत्व की बात करेंगे। चूंकि इस पाठ में शामिल की गई बातों पर हम पिछले पाठ में चर्चा कर चुके हैं।

उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- समझा सकेंगे कि अमूर्तीकरण किस तरह से गणितीय सोच का हिस्सा है।
- समझा पाएंगे कि गणित करने के लिए विशिष्टीकरण और व्यापकीकरण की प्रक्रियाएं क्यों जरूरी है।
- वर्णन दे सकेंगे कि गणितीय उपपत्ति क्या है।
- सोचने की उन प्रक्रियाओं की पहचान कर सकेंगे जिनका गणित पढ़ाते समय बच्चों में विकास किया जाना चाहिए।

गणित क्या है :

एक शिक्षक प्रशिक्षक अरूणा प्राथमिक विद्यालय के अध्यापकों से गणित सिखाने के उनके दृष्टिकोणों पर बातचीत कर रही थी। उनमें से अनेक लोगों की शिकायत थी कि बच्चे गणित सीखना ही नहीं चाहते। अरूणा ने उनसे पूछा कि उनमें से हरेक के लिए गणित का अर्थ क्या है– संख्या व गणना या कुछ और?

शिक्षकों ने कहा कि गणित का अर्थ है संख्याएँ और उन पर गणना ।

अरूणा ने सवाल किया कि अगर ऐसा है, तो क्या इस परिभाषा में ज्यामिति, आकार व स्थान का अध्ययन ठीक बैठता है? कुछ देर मिलजुल कर सोचने के बाद यह ''परिभाषा'' सामने आई कि ''गणित संख्याओं और स्थान का अध्ययन है''।

अरूणा : (बातचीत को कुछ दूसरी तरफ मोड़ते हुए) संख्याएँ क्या होती हैं?

शिक्षक : (काफी चर्चा के बाद) शिक्षक ''संख्याएँ .... जैसे– 5 का मतलब है 5 लोग होंगे, 5 कुर्सियाँ होंगी, आदि।'')

अरूणा : अच्छा, तो आप यह कह रहे हैं कि इन सब बातों में एक सामान्य गुण है कि वे कितने हैं। आप उसे 5 कह रहे हैं।

एक अध्यापक : हाँ, और सभी संख्याएँ ऐसी ही होती हैं।

अरूणा : तब आप (–5) को कैसे समझाएंगे?

एक अध्यापिका : इसका मतलब होगा कि 5 वस्तुओं कम हैं। जैसे कि, हमें किसी को 5 रूपये देने हों।

मजेदार बात यह है कि इस बातचीत से साफ तौर पर दिखता है कि हम विशेषण के रूप में संख्याओं का इस्तेमाल करते हुए ही संख्याओं की अमूर्त अवधारणा तक पहुंचते हैं। जब हम किसी संख्या की बात करते हैं, तो हम वास्तव में किसी समुच्चय के किसी निश्चित भौतिक गुण की बात कर रहे होते हैं। इस तरह, जब हम सख्या ''दो'' की बात करते हैं, तो हम वस्तुओं के किसी ऐसे समूह की ओर इशारा कर रहे होते हैं, जिसकी वस्तुओं के साथ एक–एक की संगति (1–1 correspondence) बिठा सकते हैं (जैसे – कमीज़ की बाहें), (एक पहलू एक बाह के संगत है) इसी तरह हम कहते हैं कि किसी सिक्के में दो पहलू होते हैं, अधिकतर लोगों की दो आंखें होती हैं, एक रेखाखंड के दो अंतिम बिंदु होते हैं, और तर्क के भी दो पक्ष होते हैं। हम इन अलग–अलग वस्तुओं के समूहों में एक सामान्य गुण को अमूर्त रूप में पाते हैं और वह है हरेक में वस्तुओं की संख्या। यह वह संख्या है, जिसे हम ''दो'' कहते हैं। पिछले उदाहरण की तरह इस गुण का अमूर्तीकरण करने के बाद और ''दो'' को समझ लेने पर, अब हम संख्या दो के बारे में सोच सकते हैं, बिना उन वस्तुओं पर ध्यान दिए जिन–जिन के इस्तेमाल से हमने यह अवधारणा बनाई। संख्या दो का अन्य संख्याओं जैसे 6 और अन्य अमूर्त गणितीय वस्तुओं (जैसे आयतों) के साथ पूरी तरह अमूर्त और औपचारिक संबंध भी होता है।

चित्र 1 : क्या हम सबके दो चेहरे होते हैं?

अमूर्तता को समझना

किसी अवधारणा को अमूर्त रूप में देख पाना वह क्षमता है, जिससे हम उस अवधारणा के अनेक विशिष्ट उदाहरणों को देख सकते हैं, यह पता कर सकते हैं कि उनमें कौन सा गुण सामान्य है, वस्तुओं से उस सामान्य गुण को अलग करके देख सकते हैं और यह देख सकते हैं कि उन वस्तुओं से हटकर उस गुण की एक स्वतंत्र पहचान है। गणित की दुनिया में अब इस गुण का अपना ही अस्तित्व है। गणित की दुनिया ऐसी ही वस्तुओं से बनी है, जिनसे आगे और अमूर्त अवधारणाएं और इन वस्तुओं के बीच अमूर्त संबंध पैदा होते हैं।

इन अमूर्त वस्तुओं की समझ हम दो तरीकों से बनाते हैं। एक वह है जिससे हम संख्या के बारे में अपनी अवधारणा का विकास करते हैं। इस प्रक्रिया में शामिल है अलग–अलग वस्तुओं का सावधानी से अवलोकन और उन वस्तुओं के सामान्य गुण को पहचानना, उस गुण को उन वस्तुओं से अलग करना जिनसे उनका अमूर्तीकरण किया गया हो। तब यह गुण अवधारणा के रूप में अध्ययन के लायक वस्तु बन जाता है। यह अनेक गैर–गणितीय अवधारणाओं (जैसे – रंग) के लिए भी सही है।

E1) गणित की दो अन्य अवधारणाओं और गैर–गणितीय क्षेत्र की दो अवधारणाओं की पहचान कीजिए जो अमूर्तीकरण की प्रकिया से पैदा होती हैं। समझाइए कि यह अमूर्तीकरण किस तरह होता है।

इस प्रकार अनेक गणितीय और अन्य अवधारणाएं विशिष्ट उदाहरणों से उनके अमूर्तीकरण द्वारा पैदा होती हैं। हम इस प्रकिया से किसी बिंदु या रेखा की संकल्पना का अमूर्तीकरण कर सकते हैं। जैसे– स्कूल में हमें बताया जाता है कि बिन्दु समष्टि में किसी स्थान को दिखाता है और इसकी कोई विमा (dimension) नहीं होती। जबकि समष्टि में बनाए गए छोटे से छोटे बिन्दु की भी कुछ विमा होती है।

इसलिए हम बिंदु की अवधारणा का अमूर्तीकरण, ठोस उदाहरणों से नहीं कर सकते, क्योंकि आदर्श रूप से बिंदु का ठोस निरूपण नहीं हो सकता। इस समस्या को हल करने का कोई आसान तरीका नहीं है। इसलिए इस अवधारणा का इस्तेमाल करते समय हम अकसर इस समस्या को नजरअंदाज कर देते हैं। इस तरह, कागज पर हम मूल बिंदु o जैसे बिंदुओं को दिखाते है, जबकि हम जानते हैं कि असलियत में बिंदु को दिखाया ही नहीं जा सकता। यह एक अमूर्त वस्तु होती है जो सिर्फ हमारे दिमाग में है। ठीक यही बात रेखाखंड (line segment) या किरण (ray) जैसे अन्य ज्यामितीय अवधारणाओं पर भी लागू होती है। इन सभी अमूर्त अवधारणाओं का गणित की दुनिया में कुछ माने गए नियमों और परंपराओं के तहत अस्तित्व होता है। इन नियमों को अभिगृहीत (axiom) कहा जाता है। ऐसी अमूर्त अवधारणाओं और संबंधित अवधारणाओं को समझने और इस्तेमाल कर पाने के लिए हम इन्हें प्रतीकों से निरूपित करने का एक तरीका चुन लेते हैं। एक बार एक खास तरीके को तय करने के बाद, हम इसका इस्तेमाल करके अपने दिमाग में मौजूद दूसरी वस्तुओं के प्रतीक तय कर लेते हैं। यह एक अन्य तरह का अमूर्तीकरण है। अमूर्तीकरण के इस दूसरे रूप के मुताबिक ही यूक्लिड (Euclid) ने कहा था कि "बिंदुओं को जोड़ने से रेखा बनती है"। इस रेखा, (जो खुद एक अमूर्तीकरण है), को जोड़ने से पृष्ठ (surface) जनित होता है, आदि।

अमूर्तीकरण के इन स्वरूपों का "इस्तेमाल" ही गणित का सार तत्व है।

E2 अलग–अलग उदाहरण देते हुए, अमूर्तीकरण के जिन दो रूपों की चर्चा की है, उनका अंतर समझाइए।

इस भाग में हमने गणितीय सोच की एक विशेषता की चर्चा की है। सोच की यह प्रक्रिया व्यापकीकरण का हिस्सा है। वास्तव में, व्यापकीकरण ही वह प्रक्रिया है, जिसके आधार पर गणित की दुनिया विकसित होती है।

विशिष्टीकरण और व्यापकीकरण

हमने गणितीय सोच की जिन महत्वपूर्ण बातों पर चर्चा की उनमें से एक उदाहरण था पूँछ की अवधारणा बनाने के तरीके का। इस प्रकिया में कुछ वस्तुओं, जैसे घोड़े या गाय, की पूँछ का अवलोकन करना शामिल था। बचपन में हमें अलग–अलग जानवरों की पूँछ दिखाई जाती है। हम यह भी देखते हैं कि अलग–अलग पूँछ अलग–अलग तरह की दिख सकती है लेकिन इन सबको पूँछ ही कहा जाता है। इस तरह पूँछ की हमारी शुरूआती अवधारणा यह हो सकती है कि यह किसी जानवर का हिस्सा होता है, जो उसके शरीर के पीछे लगा होता है। इसके बाद हम इस अवधारणा का विस्तार करते हुए, इसमें किसी चिड़िया या मछली के पीछे लगे हुए हिस्से को भी शामिल कर लेते हैं। इस अवधारणा को और आगे बढ़ाते हुए पूँछ की अपनी समझ को बदलकर इसमें हवाई जहाज या पतंग की पूँछ भी शामिल कर सकते हैं। इस तरह हम सजीव और निर्जीव को शामिल करते हुए, पूँछ वाली अन्य वस्तुओं की जांच करते जाते हैं, हम इस अवधारणा को व्यापक करते जाते हैं। आखिरकार हम पूँछ की ऐसी छवि बनाते हैं, जिसमें वस्तुओं या जन्तुओं की पूँछ के कुछ विशिष्ट लक्षण हों न हों लेकिन इसमें इन सब के सामान्य लक्षण जरूर होंगे।

अपनी रोजाना की जिंदगी में भी किसी अवधारणा को बनाने के लिए हम हर समय इसी तरह के व्यापकीकरण में लगे रहते हैं। (जैसे– चलना क्या होता है – व्यक्ति या पशु का चलना, घड़ी का चलना या किसी गाड़ी का चलना)। इस प्रक्रिया की मदद से हम अपनी गतिविधियाँ आगे बढ़ा सकते हैं जैसे – नये पौधों को उगाने के लिए हम पौधों की वृद्धि के बारे में अपने अवलोकनों का व्यापकीकरण कर सकते हैं। और सीखने–सीखाने के तरीकों को बनाने के लिए हम बच्चों के मानसिक विकास से जुड़े अपने अनुभवों का व्यापकीकरण कर सकते हैं। गणित के अध्ययन में, व्यापकीकरण की प्रक्रिया विशेष महत्व रखती है। यह हमें विशिष्ट गणितीय वस्तुओं की संरचना को समझाने में मदद देती है और पहले से बनी संरचनाओं पर और आगे ज्ञान का निर्माण करने में मदद देती है। लेकिन इससे भी ज्यादा महत्वपूर्ण बात यह है कि अकसर ज्ञान का इस तरह का विस्तार व्यापकीकरण के बिना हो ही नहीं सकता।

गणित में हमें कई अलग–अलग संदर्भों में व्यापकीकरण दिखता है। नई अवधारणाओं को परिभाषित करने के लिए हम व्यापकीकरण करते हैं, जैसे – चतुर्भुज। हम प्रक्रियाओं का भी व्यापकीकरण करते हैं, जैसे – दो भिन्नों को जोड़ने की प्रक्रिया। हम परिणामों का व्यापकीकरण करके उन्हें नई गणितीय वस्तुओं पर लागू करते हैं, जैसे कि कथन "किसी वर्ग के चारों कोणों का योग 360° होता है" का विस्तार करके हम कथन "किसी चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है" के बारे में सोचते हैं। बीजगणित, अंकगणित का व्यापकीकरण है, जिसमें चरों के प्रयोग से हम संख्याओं के इस्तेमाल और अध्ययन का नए–नए तरीकों से विस्तार कर सकते हैं।

इस प्रकार हम अलग–अलग गणितीय संदर्भों में व्यापकीकरण को समझते है। जैसे– हममें से ज्यादातर लोग बहुभुज की व्यापक अवधारणा विकसित करने के लिए अलग–अलग आकार और माप के त्रिभुजों को देखते हैं। हम आयत, वर्ग और अन्य चतुर्भुजों के बारे में भी जानते हैं। हम अपने आसपास पंचभुज से बने पैटर्न भी देखते हैं। हम जानना चाहते हैं कि 20, 50, 77 भुजाओं की आकृतियों हो सकती हैं? अगर हाँ, तो उनके गुण तथा इन सभी आकृतियो में कुछ समानताएं हैं? इस तरह हम बहुभुज (एक बंद आकृति जिसकी तीन अथवा इससे अधिक भुजाएँ होती हैं) के बारे में अपनी अवधारणा का विकास करते हैं। यह व्यापकीकरण का एक उदाहरण है। इस तरह के व्यापकीकरण से हम क्षेत्रफल, परिमाप और बहुभुज से जुड़ी अन्य अवधारणाओं का व्यापकीकरण भी करते हैं।

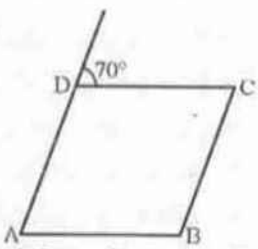
चित्र–2

आम तौर पर हम विशिष्ट मामलों के अवलोकन से और उनके गुणों को समझते हुए, व्यापक अवधारणा की समझ बनाना शुरू करते हैं। जैसे– वर्ग, समांतर चतुर्भुज या त्रिभुजों के क्षेत्रफल को समझते हुए हम "बहुभुज द्वारा घिरे क्षेत्रफल" की अवधारणा की सहज समझ बनाने लगते हैं।

उदाहरण : हम देखते हैं कि एक वर्ग के सभी आंतरिक कोणों का योग 4 समकोणों के बराबर होता है और आयत के सभी आंतरिक कोणों का योग भी 4 समकोणों के बराबर होता है। व एक समांतर चतुर्भुज के सभी आंतरिक कोणों का योग भी 4 समकोणों के बराबर है। तब हम सोचने लगते है : क्या किसी भी चतुर्भुज के आंतरिक कोणों का योग 4 समकोणों के बराबर होता है?

फिर हम सिद्ध करते है कि चतुर्भुज के आंतरिक कोणों का योग 4 समकोणों के बराबर होता है। इस तरह, हमारा व्यापक प्रश्न या अनुमान (conjecture) सिद्ध होता है। अब, मान लीजिए कि हमें इस समस्या का हल करने को कहा जाता है कि अगर किसी समांतर चतुर्भुज (parallelogram) का एक आंतरिक कोण 40° हो, तो बाकी तीन कोणों का पता लगाएं। तब हम उस व्यापक कथन, जो हम जानते हैं कि किसी भी चतुर्भुज के लिए सत्य है (और अन्य परिणामों) का प्रयोग करके इन कोणों का मान 40°, 140°, 140° निकालते हैं। इस तरह से हम व्यापक बात को विशिष्ट स्थिति पर लागू करते हैं। इस प्रक्रिया को हम विशिष्टीकरण कहते हैं।

E3 किसी समान्तर चतुर्भुज का एक बाहरी कोण 70° है तो शेष कोणों के मान ज्ञात कीजिए–



हम व्यापकीकरण और विशिष्टीकरण की इस पूरी प्रक्रिया को त्रिभुजों पर भी लागू कर सकते हैं। इससे हम सीखने वालों को बंद आकृतियों के गुण समझते हुए, व्यापकीकरण और विशिष्टीकरण की प्रक्रियाएँ समझने में मदद कर सकते हैं। व बच्चों को अहसास होगा कि गणित को समझते हुए या उसकी रचना करते हुए, हम लगातार विशिष्ट से व्यापक की ओर तथा व्यापक से विशिष्ट की ओर जाने की प्रक्रियाएं इस्तेमाल करते रहते हैं।

व्यापक समझ की ओर कैसे बढ़े :

दरअसल, किसी अवधारणा को बनाने के लिए, इस बात से मदद मिलती है कि बच्ची को अपने दिमाग में धीरे–धीरे उसकी रचना करने का मौका मिले। ऐसा ठोस उदाहरणों के अनुभव से और विशिष्ट मामलों के अध्ययन से धीमे–धीमे होता है। हालांकि हममें से कई लोग इस बात को सिद्धांत के तौर पर मानते हैं, लेकिन अपनी कक्षाओं में ऐसा आम तौर पर नहीं करते। केवल शिक्षक सीखने वालों को कई व्यापक परिभाषाएँ बता देते हैं और उम्मीद करते हैं कि बच्चे उन्हें याद कर लें। किसी परिभाषा को समझाने के लिए जो भी उदाहरण दिए जाते हैं, वे भी अलग–अलग तरह के नहीं होते। साथ ही, शिक्षकों का बच्चों को अपने उदाहरण खुद ढूंढने को कहने की अहमियत का अहसास नहीं होता।

कभी–कभी, बच्चों को किताब मे या ब्लैकबोर्ड पर कुछ विशिष्ट उदाहरण दिए जाते हैं और उसके तुरंत बाद व्यापक परिभाषा बता दी जाती है। इन दोनों ही तरह के सिखाने से, बच्चों को किसी अवधारणा की समझ बनाने में मदद नहीं मिलती क्योंकि उन्हें उस अवधारणा के बारे में सोचने के और उसे इस्तेमाल करने के और बहुत मौकों की जरूरत होती है। ऐसा शायद ज्यामिति में सबसे ज्यादा जाहिर होता है क्योंकि सीखने वाले अलग–अलग बहुभुजों में कोई संबंध जोड़े बिना ही उनके बारे में सीखते हैं। यह एक कारण है कि बहुत से लोगों को यह गलतफहमी है कि वर्ग, आयत नहीं होता।

ज्यादातर मामलों में विशिष्ट से व्यापक स्थितियों तक जाने में ऊंचे दर्जे की समझ इस्तेमाल होती है। पहले बच्चों को बहुत से ठोस उदाहरणों द्वारा, विशिष्ट स्थितियों में अवधारणा से कुछ हद तक परिचित होने की

जरूरत है। इन विशिष्ट स्थितियों से जो निचोड़ उन्होंने निकाला है, उस अमूर्तीकरण और इन स्थितियों के बीच उन्हें संबंध बना पाने की जरूरत है। तभी वे अवधारणा को उसके पूरी तरह व्यापक रूप में समझ पाएंगे। अगर हम अवधारणाओं को महज़ रटी हुई परिभाषाओं तक न छोड़ना चाहते हों तो हम शिक्षकों को यह बात अच्छी तरह समझ लेनी चाहिए।

E3 क्या सिर्फ अवधारणाओं को व्यापकीकृत किया जाता है? क्या प्रकियाओं का व्यापकीकरण किया जा सकता है? किसी एक गणितीय प्रक्रिया का उदाहरण लेते हुए समझाइए?

प्रक्रिया का व्यापकीकरण :

भिन्नों के योग का ऐल्गोरिद्म और कुछ नहीं बल्कि किन्हीं दो भिन्नों को जोड़ने की व्यापकीकृत प्रक्रिया है। (वास्तव में, इस प्रक्रिया में हम व्यापकीकरण के दो स्तर देख सकते हैं।) एक स्तर पर हमने सभी भिन्नों के लिए एक कारगर तरीका बनाया है। दूसरे स्तर पर हम योग की धारणा का व्यापकीकरण भी कर रहे हैं – हम अब पूर्ण संख्याओं को ही नहीं बल्कि पूर्ण के हिस्सों को भी जोड़ रहे हैं। जैसे – दो या अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) निकालना या किसी संख्या का वर्गमूल निकालना, या सिर्फ स्केल और कम्पास की मदद से एक कोण का द्विभाजक (bisector) खींचना। इनमें से हरेक ऐल्गोरिद्म एक व्यापकीकृत चरण–दर–चरण प्रक्रिया है। हर ऐसा ऐल्गोरिद्म तर्क पर आधारित होता है। इस मामले में व्यापकीकृत का अर्थ है कि एल्गोरिद्म का तर्क कुछ विशिष्ट स्थितियों तक ही सीमित नहीं है। यह उस वर्ग के किसी भी सदस्य पर समान रूप से लागू होता है। यह बात हम भिन्नों के योग के ऐल्गोरिद्म में देख ही चुके हैं। जैसे– वह तरीका लें जिसकी मदद से हम 90° के कोण का कोण द्विभाजक खींचते हैं। यह उस कोण के अंशमान (डिग्री) पर निर्भर नहीं करता।

E4) अपने दैनिक जीवन से जुड़ा एक उदाहरण दें, जिसमें "व्यापक से विशिष्ट की ओर" जाया जा रहा हो। साथ ही यह भी समझाइए कि आपने यही उदाहरण क्यों चुना।

E5) गणितीय गणित से जुड़ें सभी व्यापकीकरण सही नहीं होते हैं प्राइमरी स्कूली गणित से उदाहरण देते हुए इस बात को समझाइए।

हम देख चुके हैं कि गणित की दुनिया अवधारणाओं और उनके बीच संबंधों के व्यापकीकरण की प्रक्रिया से विकसित होती है। जब हम अवधाणाओं और ऐल्गोरिद्मों का व्यापकीकरण करते हैं, तो हमें यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि वह व्यापकीकरण सहीं है। इसके लिए हम मोटे तौर पर दो तरह के तर्कों का इस्तेमाल करते हैं, जिनके बारे में अब हम बात करेंगे।

उपपत्ति क्या होती है?

पिछले भाग में हमने देखा कि गणित करने की प्रक्रिया में विशिष्ट मामलों के अवलोकन के आधार पर व्यापकीकरण करना शामिल है। एक बार में हम इन विशिष्ट उदाहरणों में पैटर्न देख लेते हैं, तो हम इनके आधार पर नतीजों पर पहुंचते हैं; इस तरह अगर आप पंजाब में रह रहें हों, तो आप इस नतीजे पर पहुंच सकते हैं कि जून साल का सबसे गर्म महीना होता है। या आप एक साल की उम्र के कई बच्चों के बारे में अवलोकन करके इस नतीजे पर पहुंच सकते हैं कि इस उम्र की बच्चे कैसे दिखेंगे। आप एक गाय को घास खाते हुए देख सकते हैं फिर दूसरी को वही करते हुए देखते हैं और अनुमान लगाते हैं कि सभी गाएं घास खाती है। मिलते–जुलते बार–बार होने वाले अनुभवों के आधार पर नतीजों पर पहूंचने के इस तरीके को आगमन तर्क (inductive logic) कहा जाता है। इस तर्क के एक रूप को हम गणित में भी इस्तेमाल करते हैं और उसे गणितीय आगमन (mathematical induction) कहते हैं। पिछले पाठ में हमने देखा कि अवलोकित पैटर्न पर आधारित आगमन तर्क के इस्तेमाल से अनुमान बनाने में यह नियम किस तरह लागू होता है। जैसे– हम देखते हैं कि

$1^3+2^3 = 9 = 3^2,$

$1^3+2^3+3^3 = 36 = 6^2$

$1 + 2 = 3\ ,\ \ 1 + 2 + 3 = 6$

इन विशिष्ट स्थितियों को आधार बनाकर हम अनुमान लगा सकते हैं कि–

$1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + n^3 = (1 + 2\ \ldots\ldots\ldots + n)^2.$

अगला कदम यह सिद्ध करना है कि आपका अनुमान पूरी व्यापकता में सही है। गणित में जब हम यह दावा करते हैं कि एक कथन व्यापक तौर पर सही है, तो दरअसल हमारा मतलब यह होता है कि वह बिना किसी अपवाद के सही है, उन सभी स्थितियों के लिए जिनमें कथन की शर्तें पूरी होती हों। इसका मतलब है कि गणितीय तौर पर, यह दिखाना काफी नहीं है कि कोई विशेष कथन कई अलग–अलग तरह के मामलों में सही है; हमें दरअसल, निगमन या आगमन तर्क की प्रक्रिया से, दिखाना चाहिए कि यह कथन उन सभी मामलों के लिए सही है, जहाँ कथन की शर्तें पूरी होती हों। और यह निगमन तर्क (deductive logic) क्या होता है? रीना और विजय के बीच की इस बातचीत से शायद हमे इसका जवाब मिले।

उदाहरण 1 : रीना और विजय कक्षा 7 में पढ़ते हैं। उनकी कक्षा में 20 बच्चे हैं। उनमें कक्षा के औसत को लेकर तर्क चल रहा था। रीना ने विजय से कहा कि अगर कक्षा के हर छात्र के टेस्ट के अंकों में 5 जोड़ दी जायें तो कक्षा का औसत 5 से बढ़ जाएगा। विजय ने हिसाब लगाया और पाया कि रीना सही थी। फिर रीना ने कहा कि यह बात 5 के लिए ही सही नहीं थी – यदि सभी के अंकों में कोई भी एक संख्या जोड़ दी जाए, तो औसत उस संख्या से बढ़ जाएगा। विजय को इस बात पर यकीन नहीं हुआ। रीना ने अलग–अलग तरीकों से उसे यकीन दिलाने की कोशिश की।

चित्र 3 : निगमन तर्क का उदाहरण

पहले उसने 20 छात्रों में से हरेक के अंक लिखे और उनमें से हरेक में 6 जोड़ दिया। उसने 6 जोड़ने से पहले और बाद का औसत निकाला और विजय को दिखाया कि परिणाम सही था। विजय, को यकीन नहीं आया। उसका तर्क था कि किसी संयोग से यह इस मामले में सच हो गया होगा। पर उसे कैसे मालूम हो कि यह बाकी मामलों में भी लागू होगा। रीना ने इस बारे में कुछ देर सोचा और आखिरकार कहा, ''आओं, हम ऐसा किसी भी संख्या के लिए करें।'' और फिर उसने कई संख्याएँ लेकर औसत निकाला, पर वह विजय को यकीन नहीं दिला सकी। तब, अचानक उसने बीजगणित इस्तेमाल करने के बारे में सोचा!

उसने यह दिखाने को तय किया कि अगर हरेक छात्र के अंकों में n जोड़ दिए जाएं तो भी यह परिणाम सही होगा। उसने सभी छात्रों के अंक लिखे और हरेक के अंकों में n अंक जोड़ दिया। फिर औसत निकालने के लिए, उसने इन सब को जोड़ा और 20 से भाग दिया। उसने पाया कि यह

$$\text{संख्या} = \left(\text{मूल अंक} \ + \underbrace{n + n + \ldots + n}_{\text{20 बार}}\right) \div 20 \qquad \text{यानी } n \text{ थी।}$$

अब, विजय को पूरी तरह यकीन हुआ कि जो. रीना ने पहले कहा, वह सच था।

उदाहरण 1 में रीना ने बीजगणित की अपनी जानकारी का, संख्याओं के एक समुच्चय का औसत निकालने के जाने माने परिणाम के साथ इस्तेमाल किया। इससे उसने व्यापक तर्क के एक रूप का इस्तेमाल करते हुए अपने कथन को निगमित किया। यह निगमन के तरीके का एक उदाहरण है। इस तरह, निगमन तर्क लागू करने में हम जाने हुए परिणामों, परिभाषाओं, माने हुए अभिगृहितों और अनुमान लगाने के नियमों का इस्तेमाल करके सिद्ध करते हैं कि कोई कथन सही है या गलत।

E6) क्या रीना का कथन तब भी सही होता अगर कक्षा में 20 की जगह 25 छात्र होते या 40 छात्र होते? या 1111? क्या आप ऊपर दी गई निगमन प्रक्रिया से मिलती जुलती प्रक्रिया का इस्तेमाल करके सिद्ध कर सकते हैं कि यह परिणाम कितने भी छात्रों के लिए सही है ?

बहुभुजों के अध्ययन में उपपत्ति का उदाहरण :

किसी एक कथन की गणितीय उपपत्ति में शामिल हैं उस कथन के समर्थन में गणितीय तौर पर माने जाने वाले प्रमाण देने वाले एक या ज्यादा चरण। अगर हम कहें कि पूरे गणित में उपपत्ति की अवधारणा ही सबसे महत्वपूर्ण विचार है अगर हम किसी उत्तल बहुभुज (convex polygon) के आंतरिक कोणों का योग निकालना चाहते हैं। तो इसके लिए कुछ विशिष्ट स्थितियों से शुरूआत करेंगे। जैसे – बहुभुज के आंतरिक कोणों के योग और उसकी भुजाओं की संख्या में कोई संबंध होता है। त्रिभुज के लिए यह योग 180° और चतुर्भुज के लिए 360° होता है। इसी प्रकार पंचभुज के लिए यह योग 540° है और षट्भुज के लिए 720°। इस तरह एक तालिका बना सकते हैं।

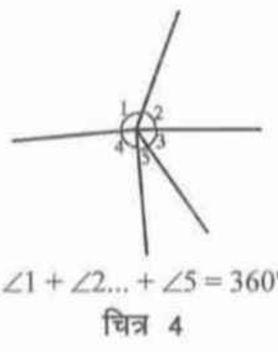
बहुभुजों की भुजाओं की संख्या	3	4	5	6
आंतरिक कोणों का योग (अंशों में)	180	360	540	720

ध्यान से तालिका को देखने पर पता चलता है कि दूसरी पंक्ति में हरेक संख्या 180 का गुणज है। तो हम हर संख्या को 180 के गुणज के रूप में लिख सकते है। इस तरह हमे मिलेगा : 180 = 1 X 180, 360 = 2 X 180, 540 = 3 X 180, 720 = 4 X180। क्या ये संख्याएं प्रत्येक स्थिति में भुजाओं की संख्या से संबंधित हैं? दूसरे शब्दों में, क्या ऐसा कोई सामान्य नियम है जो 3 से 1 को, 4 से 2 को, 5 से 3 को, आदि संबंधित करता हो? हम यह अनुमान लगा सकते हैं कि यह योग $\left[(n-2)\times 180^\circ\right]$ है, जहाँ n बहुभुज की भुजाओं की संख्या है। लेकिन हम इसकी जांच कैसे करेंगे कि आपका अनुमान सही है ? आखिरकार यह भी हो सकता है कि यह परिणाम 20 भुजा वाले बहुभुज के लिए सही न हो, या कि 67537 भुजाओं वाले बहुभुज के लिए सही न हो। हमे कथन "$n \geq 3$ के लिए n भुजा वाले बहुभुज के आंतरिक कोणों का योग $(n-2)\times 180^\circ$ है" को सही सिद्ध करने के लिए एक उपपत्ति ढूंढनी होगी। आप ऐसा कई चरणों में करेंगे, जिनमें प्रत्येक चरण पर पिछले चरण से निगमन तर्क द्वारा पहुंचा गया हो। यही कथन की उपपत्ति होगी। आइए, इस स्थिति में ऐसा प्रमाण देने के एक तरीके को देखें।

तर्क पर आधारित परिणाम की उपपत्ति देने के लिए हमें कुछ परिभाषाओं और/या अभिगृहीतों और/या पहले से सिद्ध किए गए कथनों को मानना पड़ता है। इस मामले में जो दो कथन हम मानकर चलेंगे, वे हैं –

"त्रिभुज के आंतरिक कोणों का योग 180° है।" और

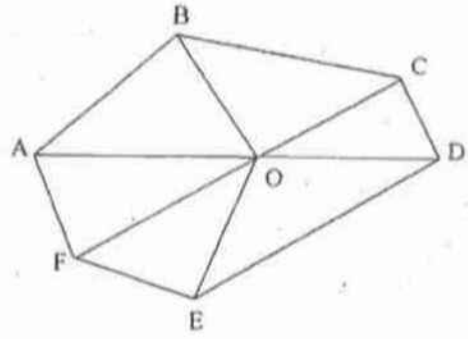
"बिंदु के गिर्द कोणों का योग 360° है।" (चित्र 4)



$\angle 1 + \angle 2 \ldots + \angle 5 = 360^\circ$

चित्र 4

कोई n–भुजा वाला बहुभुज लें और उसके अंदर कोई बिंदु O लें। इस बिंदु को बहुभुज के हरेक शीर्ष से जोड़े। चूंकि n शीर्ष है, इसलिए बहुभुज n त्रिभुजों में बंट जाता है। (इसे आसानी से समझने के लिए, हम एक बहुभुज बना सकते हैं। लेकिन यह (या कोई भी) तस्वीर केवल उपपत्ति का तर्क देखने में सहायता करती है। (चित्र 5)



चित्र 5

अब n त्रिभुजों में से हरेक के लिए उसके कोणों का योग 180° है। चूंकि n त्रिभुज है, इसलिए इस बहुभुज के अंदर कोणों का कुल योग (n x 180°) है। लेकिन बहुभुज के अंदर कोणों का कुल योग बहुभुज के आंतरिक कोणों का और बिंदु O के गिर्द कोणों का योग है। चूंकि O के गिर्द कोणों का योग 360° है, इसलिए बहुभुज के आंतरिक कोणों का योग है। $[(n \times 180°) - 360° = [(n \times 180°) - (2 \times 180°)] = [(n-2) \times 180°]$

(ध्यान दें कि तस्वीर में तो $n=6$ है, पर हम किसी भी $n \geq 3$ की बात कर रहे हैं।)

ऊपर दिए ये सभी चरण मिलकर दिए हुए परिणाम की "गणितीय उपपत्ति" बनाते हैं। इसमें , प्रत्येक चरण तार्किक रूप से पिछले चरण से निकलता है और उनमें से किसी एक परिणाम से निकलता है जिन्हें हमने उपपत्ति देने से पहले माना था। तर्क करने के इस तरीके को हम "निगमन तर्क" कहते है। इस तरह, यहाँ निगमन तर्क से हमने वास्तव में यह दिखाया है कि आगमन तर्क से जिस बात का हमने अनुमान लगाया था,, वह प्रत्येक स्थिति में सही है।

घन संख्याओं का जोड़ :

अब हम पहले किए गए अनुमान में देखे कि

हर $n \geq 3$ के लिए $1^3+2^3+.....+n^3=(1+2+...+n)^2$ की उपपत्ति आगमन नियम से दी जा सकती है या नहीं। हमें अपने कथन की सत्यता इसकी पहली स्थिति के लिए जाँच करनी है। यह स्थिति $n=1$ है। चूंकि 1 = 1 इसलिए यह कथन $n=1$ के लिए सही है।

अब हम $n=k$ के लिए इसे मान लेते हैं और फिर निगमन विधि से सिद्ध करते हैं कि यह कथन $n=k+1$ के लिए सहीं है। तो हम मान लेते हैं कि

$$1^3+2^3+.....+k^3=(1+2+...+k)^2$$

अब हम $1^3+2^3+.....+(k+1)^3$ को देखते हैं।

चूंकि $1^3+2^3+.....k^3+(k+1)^3+(k+1)^3$ (दोनों पक्षों में $(k+1)^3$ जोड़ने पर)

$$=(1+2+...k)^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\{k^2+4k+4\}}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$$

$$=\{1+2+3+------+(k+1)\}^2$$

तो यह मान लेने पर कि $n=k$ के लिए कथन सही है, हम दिखा पायें है कि यह $n=k+1$ के लिए सही है।

अतः आगमन नियम से हरेक $n \geq 1$ के लिए कथन सही है।

E7) क) गणितीय आगमन का इस्तेमाल करके सिद्ध करें कि

$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ हरेक $n \geq 1$ $n \in N$ के लिए।

ख) सिद्ध करें कि $n \geq 3$ के लिए n भुजाओं वाले समबहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण $\left[180-\frac{360}{n}\right]^0$ के बराबर है।

कब मानेंगे कि हमने सिद्ध कर दिया :

गणितीय कथन को सिद्ध करने में नीचे दी गई बातें शामिल होती हैं :

- कुछ दी हुई शर्तों को पूरा करती हुई वस्तुओं के एक दिए वर्ग के बारे में एक व्यापक कथन। यह कथन, कुछ विशिष्ट स्थितियों में दिखने वाले पैटर्न के आधार पर, या गणितीय ज्ञान के, या किसी अन्य आधार पर दिया जा सकता है।
- निगमन तर्क के जरिए, मकसद यह दिखाना है कि उन सभी स्थितियों में जिनमें कथन की शर्तें मान्य हों, यह कथन सही है।

- इस मक़सद को पूरा करने के लिए हम एक या ज्यादा कथनों का इस्तेमाल कर सकते हैं, जिन्हें हम आधार कथन (premise) कहते हैं। यह चार तरह के हो सकते हैं :
  - i) एक कथन जो पहले सिद्ध किया जा चुका हो;
  - ii) एक कथन जो उपपत्ति में पहले दिए कथनों से तार्किक रूप से निकलता हो;
  - iii) एक गणितीय तथ्य जिसे कभी न सिद्ध किया गया है, लेकिन जिसे सब सच मान कर चलते हैं, यानी कि, एक अभिगृहीत;
  - iv) गणितीय पद की परिभाषा।
- तब कथन की उपपत्ति इन आधार–कथनों से बनी होती है।

एक बार जब हम यह दिखा पाते हैं कि दिया हुआ कथन सही है, तब हम कहते हैं कि हमारा कथन सिद्ध हो गया।

कथन असिद्ध करना :

वस्तुओं के किसी दिए हुए समूह के लिए किसी कथन को गणितीय तौर पर सिद्ध करने के लिए, उसे समूह की हरेक वस्तु के लिए सिद्ध करना होता है। इसका मतलब है कि वस्तुओं के समूह के बारे में कोई कथन असत्य है अगर वह उस समूह की किसी एक भी वस्तु पर लागू नहीं होता हो। इसलिए एक गणितीय कथन असिद्ध (disprove) करने का (यानी यह सिद्ध करना कि वह असत्य है) एक तरीका यह है कि किसी भी एक ऐसी वस्तु का उदाहरण ढूंढना जो परिकल्पनाओं को तो संतुष्ट करती हो पर जिसके लिए वह कथन सही न हो।

जैसे– यह कथन "हरेक अभाज्य संख्या विषम होती है।" इसे असिद्ध करने के लिए, हमें एक ऐसी संख्या का उदाहरण ढूंढना है, जो अभाज्य हो पर विषम न हो। यह देखना आसान है कि 2 अभाज्य है पर सम है। इसलिए 2 का अस्तित्व यह दिखाने के लिए काफी है कि दिया कथन असत्य हैं।

इसी तरह, कथन। "हरेक विषम संख्या अभाज्य है। क्या आप इसे सिद्ध या असिद्ध कर सकते हैं? ऐसे कितने ही प्रतिउदाहरण (counter example) हैं, जो इसे गलत साबित करते हैं – 9, 15, ... लेकिन इसे असिद्ध करने के लिए एक ही काफी है।

E8 एक सत्य और एक असत्य गणितीय कथन का उदाहरण दें। साथ ही सिद्ध करें कि यह कथन क्रमशः सत्य या असत्य है।

E9 कथन 2 = 1 की निम्नलिखित उपपत्ति देखें, जिसे मेरे दोस्त ने दिया :

चरण 1 : मान लें कि a और b दो संख्याओं हैं, जिनके लिए $a = b$

चरण 2 : दोनों तरफ a से गुणा करने पर हमें मिलता है $a^2 = ab$

चरण 3 : दोनों तरफ b^2 से घटाने पर हमें मिलता है $a^2 - b^2 = ab - b^2$

चरण 4 : दोनों तरफ गुणनखंड करने पर हमें मिलता है $(a+b)(a-b) = b(a-b)$

चरण 5 : दोनों तरफ $(a-b)$ से भाग देने पर हमें मिलता है $(a+b) = b$

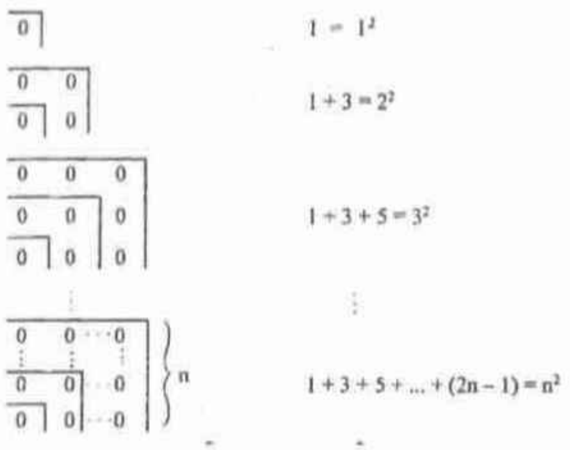
चरण 6 : अब $a=b=1$ लेने पर हमें मिलता है $1+1=1$ यानी 2 = 1.

क्या आप इस उपपत्ति को मानते हैं? कारण सहित बताइए?

E9 का मुद्दा यह दिखाना है कि हमें जाने माने परिणामों को लागू करने में भी बहुत सावधान रहना चाहिए जब हम उन पर आधारित गणितीय कथन सिद्ध करते हैं। हमें लग सकता है कि हम अपने गणितीय तथ्य और नियम अच्छी तरह से जानते हैं और हम "आँख मूँद कर" उन्हें लागू कर सकते हैं। पर अगर हम गणितीय तौर पर सावधान नहीं है, तो काफी आसानी से गलतियां कर सकते हैं।

कथन को सिद्ध करने की जो प्रक्रिया हमने ऊपर दी है, क्या सिर्फ वही एक तरीका है?

कथन 1 + 3 + 5 ... + $(2n-1)=n^2$, जहाँ प्राकृतिक संख्या है, की दृश्य उपपत्ति (चित्र 6)



चित्र 6 : एक दृश्य उपपत्ति

सच्चाई यह है कि भले ही ऐसा दृश्य प्रमाण इस कथन को सिद्ध करने में मददगार हो, गणितज्ञ इसे उपपत्ति के तौर पर नहीं मानते। क्योंकि हमें याद रखना चाहिए कि गणित में हमें उपपत्ति से यह अपेक्षा है कि इसे उन सभी स्थितियों में सही होना चाहिए, जिनमें जिस कथन को हम सिद्ध कर रहें हैं, उसकी शर्तें सही हों! उन सभी संभव स्थितियों को जिनमें किसी कथन की शर्तें सही हो, देख पाना प्रायः असंभव होता है। जैसे – हम कोई आरेख खींच लें जिसमें कोई विशेष कथन सही हो, और यह सोच भी न पाये कि और भी संभव स्थितियां हो सकती है जहाँ कथन की सब शर्तें पूरी होती हों और फिर भी वास्तव में कथन असत्य हों।

जैसे – हममें से कई जैसे आयतों का क्षेत्रफल निकालते हैं। जब हम लंबाई बढ़ाकर आयत खींचते हैं, तो अकसर उसकी चौड़ाई भी बढ़ा बैठते हैं। इस तरह हम पाते हैं कि लंबाई के साथ–साथ उसका क्षेत्रफल भी बढ़ जाता है। यह बात हममें से कई को इस व्यापकीकरण की तरफ ले जाती है कि आयत की लंबाई ज्यादा होने पर उसका क्षेत्रफल बढ़ जाता है। पर, क्या यह कथन सही है? आप खुद ही अलग–अलग परिमाप–चौड़ाई वाले आयत बनाकर क्यों नहीं देखते? क्षेत्रफल लंबाई व चौड़ाई दोनों पर निर्भर करता है। आप आसानी से ऐसे उदाहरण ढूंढ सकते हैं जो साबित कर दें कि यह व्यापकीकरण गलत है। यह गलत व्यापकीकरण सिर्फ ऐसे सीमित उदाहरणों की वजह से आया जिनके जरिए हमारा गणितीय ज्ञान बना।

दूसरा मुद्दा जो इस उदाहरण से सामने आता है वह यह है कि अगर हम पाएं कि हम किसी ऐसे नतीजे पर पहुंच रहे हैं, जो हमारी आम (और गणितीय) समझ के विपरित हो, तो शायद हमें रूक कर अपने काम को ध्यान से दोबारा देख लेना चाहिए। पर कभी–कभी हमारा अंतर्ज्ञान या आम समझ गलत हो सकते हैं, क्योंकि यह गिने चुने मामलों को देख कर बनाए गए हैं और उससे सीमित हो सकते हैं यानी विशेष स्थितियों से हमारा व्यापकीकरण गलत हो सकता है।

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित बिन्दुओं पर विचार किया –

1. हमने देखा है कि गणित की दुनियां अमूर्त वस्तुओं और उनके बीच संबंधों से बनी होती है। इस पर सहमति होती है कि ये वस्तुओं कुछ नियमों और परंपराओं का पालन करेंगी।
2. विशेष स्थितियों में दिखने वाले पैटर्नों के आधार पर व्यापकीकरण करना गणितीय तर्क का सार है। ये व्यापकीकरण सही होने चाहिए। सही होने का मतलब है कि वे हर स्थिति के लिए सही होने चाहिए जो उन शर्तों को पूरा करती हो जिनके अधीन वे व्यापकीकरण किए गए हैं।
3. हमने गणित में उपपत्ति और किसी कथन को असिद्ध करने में क्या शमिल होता है, को देखा।

पाठ – 3
भाषा का विकास

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- गणित समझाने में भाषा की भूमिका
- इबारती सवाल
- गणित की भाषा सीखना
- सारांश

परिचय

गणित का और भाषा सीखने का आपस में तीन अलग–अलग स्तरो पर सम्बंध है :

1) **गणित को समझाने की भाषा** : जब शिक्षक कक्षा में गणित (अवधारणाएं, सूत्र, संक्रियाएं, प्रक्रियाएं, प्रमेय) समझाते हैं, तो वे आम भाषा का इस्तेमाल करते हैं।

2) **सवाल हल करने की भाषा** : हमारा गणित सीखने का प्रमुख लक्ष्य यह क्षमता विकसित करना कि हम रोजमर्रा की समस्याओं को गणितीय सवाल के रूप में बदल सकें, इन्हें ज्ञात तकनीकों के जरिए हल करें, और फिर उन उत्तरों को वास्तविक जीवन की समस्याओं के अर्थपूर्ण हल में रूपांतरित करें। बच्चे इस क्षमता को उपयुक्त इबारती सवाल को करते हुए विकसित करते हैं।

3) **गणित बतौर एक भाषा** : गणित खुद भी एक भाषा है। इसके अपने प्रतीक, शब्द और व्याकरण के नियम है। यह कुछ सुसंगत पूर्वधारणाओं (assumption) पर आधारित है, और उस तर्क के कुछ नियमों के अनुसार निर्मित हुआ है। गणितीय सोच के विकास के लिए इस तर्क को समझना व उपयोग करना जरूरी है, और यह क्षमता आम भाषा के विकास पर निर्भर है। जैसे– 'और', 'लेकिन', 'इसलिए' व 'या' आदि समुच्चयबोधक शब्दों के उपयोग की क्षमता हासिल करने के बाद ही बच्चे गणितीय तर्क के ऐसे वाक्य समझ पाएंगे : "प्रत्येक वर्ग एक आयत होता है, लेकिन प्रत्येक आयत वर्ग नहीं होता।"

दो भाषाओं के बीच पारस्परिक क्रिया का एक पहलू यह भी है कि दोनो में कुछ सामान्य शब्दों का उपयोग होता है। गणित में आम भाषा के कुछ शब्दो का भी उपयोग होता है, मगर एक निश्चित गणितीय अर्थ के साथ। जैसे– जोड़, घटा, गुणा, भाग, घात, आदि ये शब्द कई बार गलतफहमी की वजह बनते हैं क्योंकि इनका गणितीय अर्थ और आम बोलचाल में अर्थ अलग–अलग हो सकते हैं।

चित्र 1

आगे हम गणित और भाषा के संबंध के विभिन्न पहलुओं की चर्चा करते हुए आमतौर पर संख्याओ से सम्बंधित उदाहरणो का ही उपयोग करेंगे। लेकिन इनका परस्पर सम्बंध गणित के किसी भी क्षेत्र मे देखा जा सकता है।

उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- गणित सीखने में आम भाषा की भूमिका समझा पाएंगे।
- बच्चों को इबारती सवालों में आने वाली दिक्कतों का वर्णन कर पाएंगे और सुधार के लिए तरीका विकसित कर पाएंगे।
- यह समझा पाएंगे कि गणित की भाषा क्या होती है।
- बच्चों को गणित की भाषा सीखने में मदद देने के तरीके विकसित कर पाएंगे।
- अपने शिक्षण के तरीकों का मूल्यांकन कर पाएंगे।

गणित समझाने में भाषा की भूमिका

आप किसी बच्ची को '3' की अवधारणा समझाने हेतु उसे 3–3 वस्तुओं के विभिन्न समूह (पेंसिले, किताबें, बच्चे, पेड़) में मौजूद '3 के भाव' को समझने में मदद करेंगे। बच्ची को इस तरह की अमूर्त अवधारणाओं तथा उनसे सम्बंधित शब्दो हेतु हम ठोस वस्तुओं, चित्रों, आदि का इस्तेमाल करतें है। साथ–ही–साथ हम उसे हर बात आम भाषा में समझाते हैं। इसी तरह, गणित की कोई भी बात समझाने के लिए, हमें बच्ची की पहली भाषा का, या जो भी भाषा वह समझती हो उसका, सहारा लेना होता है। इसके अलावा आम भाषा का उपयोग भी उस स्तर पर करना होता है, जो बच्ची को समझ में आए। लेकिन कई शिक्षक और पाठ्यपुस्तक लेखक इस पहलू पर कोई विचार नही करते। यह एक प्रमुख कारण है जिसकी वजह से लोग सोचते है कि "गणित कठिन है"। जैसे– कक्षा 2 की किताब में माचिस के बक्स, मोटी किताब, अलमारी और संदूक की तस्वीरें दिखाकर कह देते है कि यहां पर दी हर वस्तु घनाभ के आकार की है। इसलिए इन्हें घनाभकार वस्तु कहते हैं।

बच्चे इसे नहीं समझ पाते, तो वे गलतफहमियां पाल लेते है। इन्हीं अवधारणाओं को समझाने का बेहतर तरीका यह होगा कि उन शब्दो का उपयोग किया जाए जो बच्चों के जाने–पहचाने हों, तथा साथ में शरीर के हावभाव और इशारों का इस्तेमाल किया जाए। यदि शब्द बच्चों के भाषा विकास स्तर से मेल नही खाते, तो इन्हें फिलहाल छोड़ दिया जाना चाहिए। इसके अलावा, हमें छोटे बच्चों को 'घनाभकार', 'तिकोन' आदि जैसी गणितीय अवधारणाओं की लम्बी और उलझी हुई व्याख्याएं व परिभाषाएं देने से भी बचना चाहिए। इस स्तर पर इतना ही काफी होगा कि बच्चे उदाहरण देकर बता सकें कि कौन सी वस्तु घनाभ है और कौन सी नही हैं।

यदि हम शुरू से ही इन पहलुओं का ख्याल नही करेंगे, तो बच्चो को आगे की अवधारणाए व प्रक्रियाएं कभी स्पष्ट न हो सकेंगी। वे गणित की भाषा को लेकर कभी सहज न हो पाएंगे। हर मोड़ पर वे ऐसे संकेतों या सुरागो की तलाश में रहेंगे जिनकी मदद से परिभाषा या सूत्र को कम से कम याद तो रख सकें और फिर जैसे ही किसी जरा भी अपरिचित सवाल को हल करेगे तो ये बच्चे तरह–तरह की गलतियां करेंगे।

? भाषा के उपयुक्त प्रयोग से बच्चों में पाई जाने वाली गलत अवधारणाओं को सुधारा जा सकता है क्या आप इस बात से सहमत है? कारण भी बताइये?

E1) आप जिस बच्चे को पढ़ा रहे हैं, उसकी गणित पाठ्यपुस्तक के किसी अध्याय का भाषा की दृष्टि से विश्लेषण कीजिए।

अब हम देखते हैं कि किसी गणितीय संदर्भ में इस्तेमाल की गई भाषा को न समझ पाने की वजह से किस तरह की समस्याएं उत्पन्न होती है।

इबारती सवाल

हमें सही तरह के इबारती सवालों के द्वारा बच्चों को गणितीय अवधारणाओं व प्रक्रियाओं से परिचित कराने की जरूरत है। इन सवालों से उन्हें ऐसे संदर्भ मिलते है जो उन्हें प्रोत्साहित करें। लेकिन बच्चों को इबारती सवाल देते समय ध्यान रखना चाहिए कि सवाल सरल शब्दों में हो तथा बच्चो के रोजमर्रा के अनुभवों से जुड़े हों।

इबारती सवालो को हल करनें में बच्चे को सबसे पहले तो यह समझना होता है कि सवाल में क्या कहा गया हैं और इसके बाद उसे इस सवाल को वास्तविक जीवन के संदर्भ से उपयुक्त गणितीय रूप बदल कर प्रतीको में लिखना होता है। फिर इस गणितीय सवाल को हल करने के लिए उपयुक्त गणितीय प्रक्रिया चुनना व उसे इस्तेमाल करना होता है और अंत में उत्तर को वापिस उस वास्तविक जीवन के संदर्भ में रखकर समझना होता है, जहां से शुरू किया था।

अर्थात किसी शाब्दिक सवाल को हल करने के चरण निम्नानुसार हैं :

1. वास्तविक जीवन के सवाल को समझना
2. इसे गणितीय कथनो में बदलना
3. तुल्य गणितीय सवाल की रचना करना
4. गणितीय सवाल को हल करना
5. वास्तविक जीवन के संदर्भ में उत्तर को समझना

लेकिन अधिकांश बच्चों का शुरू से इबारती सवालों से सामना नही होता। अधिकांश शिक्षक व पाठ्यपुस्तकें अवधारणाएं समझाने के लिए सीधे अमूर्त संख्या–सवालों पर चले जाते हैं या फिर शब्दहीन चित्रों का उपयोग करते हैं। इबारती सवालों पर तो वे साल के अन्त में आते हैं। इसका नतीजा यह है कि बच्चों को ऐसे सवालों को हल करने में बहुत कठिनाई होती हैं।

जैसे– एक दिन शिक्षक ने हमें बताया कि वे जब भी बच्चों को चार संक्रियाओं में से किसी से भी सम्बंधित इबारती सवाल देते है तो कक्षा में फुसफुसाहट शुरू हो जाती है और डर का माहौल बन जाता है। और "यदि आप गुणा और भाग सिखाने के तुरंत बाद बच्चों को इबारती सवाल दे दें तो बड़ा दिलचस्प असर दिखाई देता है। उन्हें यह पता है कि सवाल का सम्बंध जरूर उस बात से है जो अभी–अभी सिखाई गई है। यानि या तो गुणा होगा या भाग। फिर वे पूछते है, "सर, गुणा करें या भाग?"

यदि हम कक्षा 4 या 5 के बच्चों को देखे जिन्हें चार गणितीय संक्रियाओं से सम्बंधित कुछ सीधे कथन वाले सवाल (जिनमें सिर्फ संख्याओं और प्रतीको का इस्तेमाल किया गया हो) और कुछ इबारती सवाल दिए गए है। आपको कुछ सामान्य पैटर्न नजर आएंगे। बच्चे पहले उन सवालों को करते है जो सही ऐल्गोरिद्म शैली में लिखे हों। इसके बाद वे आपस में कानाफूसी करने लगते है। और फिर अधिकतर बच्चे बाकी के सवाल बिना हल किए छोड़ देते हैं। जो थोड़े से बच्चे इबारती सवाल करने की कोशिश करते है, वे थोड़ा हिचकिचाते हुए शुरू करते हैं। डर और आत्मविश्वास की कमी साफ नजर आती है। वे कई अटकलें आजमाते हैं। इनमें से कुछ बच्चे ज्यादातर कुछ संख्याओं को जोड़कर शुरू करते है इसके बाद वे आसपास के बच्चों की कॉपियों में झांकते है कि उन्होंने वही किया है या नही।

कुछ बच्चे सवाल के शब्दो में ऐसा कोई सुराग ढूंढने की कोशिश करते है जिससे उन्हें पता चल जाएं कि कौन सी संक्रिया करनी है। शायद उनका तर्क कुछ इस तरह चलता है: "यदि 'भाग' या 'बांटो' शब्द दिखे, तो सवाल भाग का हैं। यदि सवाल में कही 'कुल संख्या' लिखा हो, तो सवाल जोड़ का हो सकता है। यदि उसमें कहीं, 'कितने और' 'या 'कितने बचे' लिखा है तो, सवाल घटाने का हैं। और यदि 'गुना' या 'दर' शब्द दिखाई पड़ जाएं, तो पूरी संभावना है कि सवाल गुणा का है।"

कई बार वे सवाल में दी गई संख्याओं में भी सुराग की तलाश करते हैं। इस मामले में, ऐसा लगता है कि उनका तर्क इस प्रकार होता है: "यदि संख्याएं छोटी हैं, तो शायद उनका गुणा करना हो; यदि एक संख्या बड़ी है और दूसरी छोटी है, तो भाग आजमा लो; यदि भाग देने पर कुछ शेष बच जाएं तो हमने गलती कर दी, इसलिए कोई और संक्रियां लागू करनी चाहिए।"

बच्चे ऐसे संकेत का इस्तेमाल करते है, ताकि किसी तरह यह पता लग जाए कि कौन सी संक्रिया लागू करनी है और किन संख्याओं पर लागू करनी है। जिसे हम सीखना मानते है उस पर हमारा जोर ही शायद इबारती सवालों के साथ बच्चों के ऐसे व्यवहार का कारण है। हममें से कई लोगो के हिसाब से अंकगणित सीखने का मुख्य उद्देश्य है संक्रियाओं को सही–सही व तेजी से कर पाना। पाठ्यपुस्तकों व पाठ्यक्रम का दबाव भी मांग करता है कि शिक्षक बच्चों को बड़ी से बड़ी संख्याओं तथा मुश्किल से मुश्किल सूत्रो व नियमों की ओर धकेलें। और यह सब करते हुए बच्चों को इस बात के लिए समय ही नही दिया जाता कि वें इस सब में निहित गणित के बारे में सोच सकें, उसे समझकर ग्रहण कर सकें।

स्थिति तब और भी पेचीदा हो जाती है जब हममें से कई लोग बच्चों को अटकल लगाने के ऐसे कारगर तरीके सिखा देते है जिनसे पता चल सके कि कौन सी संक्रियां करनी है (बगैर समझे!)। हम उन्हें शॉटकर्ट और ऐल्गोरिद्म सिखा देते है। इन तरीको से जाने–पहचाने सवालों के अपेक्षित उत्तर निकालने में तो जरूर मदद मिलती है। लेकिन बच्चे समझ नहीं पाते कि हो क्या रहा है, और क्यों। और नतीजा यह होता है कि अगर उसी सवाल की भाषा में थोड़ी फेरबदल कर दिया जाए तो मुश्किल और बढ़ जाती है। हम भी ठोस वस्तुओं व परिचित संदर्भो में बच्चो को इन संक्रियाओं का अभ्यास कराने के लिए जरूरत के मुताबिक समय नही लगाना चाहते। हम उन्हें ऐसे सवाल हल करने के काफी मौके नही देते जिनमें संख्याएं छोटी–छोटी हों और जिन्हें करने के लिए ऐल्गोरिदम का उपयोग भी न करना पड़ें। हम एक ही संक्रिया पर आधारित सरल सवालों से शुरू करके उन्हें धीरे–धीरे ऐसे इबारती सवाल दिए जा सकते हैं जिनमें कई चरण हों। इस तरह से वे मुश्किल सवाल भी

कर पाएंगे : "अशोक की मां ने उसे 50 रुपए दिए। उसने 10 रुपए दर्जन के भाव से 2 दर्जन संतरे तथा 6 रुपए किलो के भाव से 3 किलो आलू खरीदे। कितने रुपए वापिस लेकर आएगा?

? बच्चों को इबारती सवाल कराना उतना ही जरूरी है जितना कि साधारण अंकगणित वाले सवाल। क्यों?

? क्या भाषा के सही प्रयोग से इबारती सवालों को सही ढंग से करवाया जा सकता है?

E2) ऐसे अन्य कारण बताइए जिनकी वजह से बच्चे इबारती सवालों के प्रति सहज नही हो पाते।

बच्चों को वास्तविक जीवन के संदर्भ में बनाए गए सवाल दिए जाते हैं, लेकिन उत्तर के रूप में जो संख्याए आती है वे एक ऐसी प्रक्रिया के माध्यम से आती है, जिसे बच्चे समझ नहीं पाते इसलिए अक्सर बच्चे इन संख्याओं का सम्बंध वास्तविक जीवन की स्थिति से नही जोड़ पाते। नतीजा यह होता है कि वे बेतुके उत्तर निकाल लाते है। जैसे 8–10 वर्षीय बच्चों को यह सवाल दिया गया : 149 बच्चो को जीप से घर जाना है। एक बार में एक जीप अधिक से अधिक 12 बच्चों को ले जा सकती हैं। जीप को कितने चक्कर लगाने पड़ेगें? इसका उत्तर निकालने के लिए बच्चों ने 149 को 12 से भाग दिया।

एक को छोड़ कर, बाकी सभी का उत्तर था, "12 चक्कर लगेंगे, और पांच बच्चे बच जाएंगे।" सिर्फ एक बच्ची ने उत्तर दिया था, "13 चक्कर।" जब उससे कारण पूछा गया तो उसने कहा कि पांच बच्चें बचेंगे उनके लिए एक और चक्कर लगाना पड़ेगा।

जब यही सवाल थोड़े बड़े बच्चों से पूछा गया, तो उनका उत्तर 12.4 आया जब उन्हें इसे समझाने के लिए कहा, तो उनमें से कुछ बच्चों ने इसको नजदीकी पूर्ण संख्या में बदलते हुए 12 बता दिया क्योंकि उनका कहना था कि "0.4 तो 0.5 से कम है।" अर्थात् उनके हिसाब से 149 बच्चों के लिए तो जीप के 12 चक्कर लगेंगे जबकि 151 बच्चों के लिए 13 चक्कर लगाने पड़ेगे।

E3) भाग का कोई ऐसा सवाल बनाइए जो आपके आसपास के 10–11 वर्षीय बच्चों के वास्तविक जीवन से जुड़ा हो। कुछ 10 या 11– वर्षीय बच्चों को यह सवाल दीजिए और उनके उत्तरों को नोट कीजिए। उनके उत्तर किस हद तक सही रहें?

इस प्रकार इबारती सवालों के संदर्भ में बच्चों को कई स्तरो पर दिक्कत आती है। मुख्य रूप से वे वास्तविक जीवन की किसी स्थिति को गणितीय रूप में और किसी गणितीय कथन का अर्थ वास्तविक जीवन की स्थिति में नही समझ पाते। ऐसा कर पाने के लिए जरूरी है कि बच्चे सवालों की आम भाषा को सार्थक ढंग से गणित के प्रतीको व शब्दों से जोड़ पाएं। इस सम्बंध को जोड़ने के लिए ठोस वस्तुओं या चित्रात्मक रूप में प्रस्तुतीकरण तथा साथ में समझाने वालें हावभाव और इशारों का उपयोग कर सकते हैं। जेसे– यदि सवाल यह है कि '5–5 पत्थरो के दो समूहों को मिलाने पर कुल कितने पत्थर होंगें?", तो बच्चे सचमुच के पत्थरों का उपयोग करके उत्तर निकाल सकते हैं।

अन्य तरीका

उदाहरण 1: होमी के अनुसार बच्चो के साथ मिलकर इबारती सवाल बनाए जाएं। जैसे– होमी उनसे पूछता है, "मुन्नी 5 साल की है और उसकी मां 29 साल की है। तुम उन दोनो की उम्रो का सम्बंध कैसे जोड़ोगे?" एक बच्ची 29–5 = 24 कहेगी, तो दूसरे कह सकती है कि 6 X 5 = 29 + 1 वगैरह। फिर होमी इनमें से कोई एक सम्बंध, जैसे 29–5 = 24 लेकर बच्चों से कहेगा कि इससे मेल खाता एक इबारती सवाल बनाएं। यहां होमी बच्चों को इस तरह संकेत देता है कि "सवाल में 29 क्या था?" "उसमें 5 क्या था?" आदि। कुछ समय बाद होमी और बच्चे मिलकर निम्नलिखित कथन पर पहुंच जाते है,

मां की उम्र – मुन्नी की उम्र = 24 वर्ष।

इसके बाद होमी उन्हें यही क्रिया 6 X 5 = 29 +1 या किसी अन्य सम्बंध के बारे में करने को प्रेरित करता है।

मान लीजिए कि वे निम्नलिखित कथन बना लेते है;

6 X मुन्नी की उम्र = मां की उम्र + 1 वर्ष

अब होमी उनसे इससे जुड़ा कोई इबारती सवाल बनाएं। तो थोड़ी मदद के बाद बच्चे इस तरह के सवाल बना लेते है : "मुन्नी की मां की उम्र 29 साल है। एक साल बाद उसकी उम्र मुन्नी की वर्तमान उम्र से छः गुना ज्यादा होगी। तो बताओं मुन्नी की उम्र क्या है?" फिर होमी और बच्चे मिलकर अपने बनाए इस सवाल को हल करते हैं। इसके लिये वे उन सारे चरणो को उलट देते है जिनसे उन्होंने सवाल बनाया।

होमी के मुताबिक बच्चों को इस शिक्षण प्रक्रिया में बहुत मजा आता है। इससे उन्हें इबारती सवालों को हल करने के विभिन्न चरणो को समझने में भी मदद मिलती है।

E4) "इबारती सवालों को हल करने को लेकर बच्चों की उलझन की एक खास वजह यह है कि एक ही गणितीय कथन कई अलग–अलग तरह के इबारती सवालों को दर्शाते हैं।" 4+3 = 7 का उदाहरण लेकर इस कथन की व्याख्या कीजिए।

गणित की भाषा सीखना

गणित की भाषा भी अन्य भाषा की तरह ऐसी अवधारणाओं, शब्दों, प्रतीकों, ऐल्गोरिद्मों और व्याकरण से मिलकर बनी है, जो खास इसी के लिए बने है। बच्चे इस भाषा को तभी सीख सकते हैं जब वे इसका इस्तेमाल करें (बोले, लिखें व सुनें)। पिछले पाठों में हमनें बच्चो के साथ गणित की बातचीत करने, जो कुछ वे कर रहे हैं उसके बारे में उन्हें बताने को प्रेरित करने और गणित की चर्चा के जरिए उनकी समझ को आगे बढ़ाने के महत्त्व पर जोर दिया है। उनकी समझ गणितीय भाषा व सोच को बेहतर बनाती हैं।

यह जरूरी नहीं है कि छोटे बच्चों की बाते सुसंगत या तर्कपूर्ण हो। क्योंकि सही ढंग से बताने के लिए बच्ची को इस बात पर गौर करना होगा कि उसने क्या किया और इसके लिए किस प्रकार के ऊंचे स्तर की सोच की जरूरत है ताकि वह क्रिया में शामिल विभिन्न गणितीय प्रक्रियाओं को साथ–साथ रखने की, उन्हें व्यवस्थित करने तथा शब्दो में व्यक्त करने की क्षमता का विकास कर पाए।

लेकिन अधिकांश शिक्षक अपने छात्रों से वैसी बातचीत करने की कोशिश नही करते। कक्षा 1 के पाठ्यक्रम में 1 से 9 तक की संख्याओं व अंको की अवधारणा सिखाने के लिए 30 घण्टे का समय निर्धारित किया गया है। और आम कक्षा में शिक्षक कक्षा में उपलब्ध कोई भी वस्तु जैसे झोला, छाता, पेन उठाकर कह देती है कि यह 'एक' है। फिर वह ब्लैकबोर्ड पर अंक 1 लिख देती है, जिसे छात्र बिना सोचे–समझे अपना काम समझकर कॉपी पर उतार लेते है। यह सब दो–तीन मिनट में पूरा हो जाता है, और शिक्षक संतुष्ट हो जाती है कि उसने 'एक' की अवधारणा बच्चों को सिखा दी है। इसी तरह से वह उन्हें विभिन्न संख्याओं के नाम और प्रतीक बता देती है और उम्मीद करती है कि वे इस पूरी नई बोली व लिखित भाषा को सीख लेंगे।

लेकिन बच्चे यह नहीं कर पाते, आसपास के वयस्कों की मदद से पढ़ाने के इस तरीके से जूझने में सफल हो जाते हैं। इसकी वजह से बच्चे गणितीय अवधारणाओं, प्रक्रियाओं व कौशलों को लेकर कई गलत धारणाएं पाल लेते हैं। जैसे– बच्चे गणितीय संक्रियाओं पर ऐल्गोरिद्म का उपयोग कर सवालों को हल कर पाते परन्तु गणितीय अवधारणाओं को समझ नहीं पाते। अधिकांश बच्चे 5 अंको वाली संख्यांक सही–सही नही पढ़ पाए। लेकिन उनमें से कई बच्चे 4 या 5 अंको के संख्याओं का गुणा सही कर लेते थे।

किसी ऐल्गोरिद्म का आधार न समझ पाने का कारण अक्सर यह होता है कि बच्चों को इस बात की काफी समझ नही होती कि हम संख्याओं को एक विशेष ढंग से ही क्यों लिखते हैं। इसके चलते बच्चे जिस तरह की गलतियां करते हैं, जैसे–

जब जमुना से 20 और 1 को नियमानुसार जोड़ने को कहा गया तो उसने लिखा $\begin{array}{r} 20 \\ +1 \\ \hline 30 \end{array}$ लेकिन मौखिक (अनौपचारिक) रूप से करने पर उसका उत्तर 21 आया।

यानी कई बच्चे जानते है कि इकाई, दहाई और सैकड़ा व किसी संख्या में इकाई, दहाई या सैकड़ा को जोड़ने का अर्थ क्या है, मगर वे इसका संबंध लिखित ऐल्गोरिद्म के साथ नही जोड़ पाते। वे एल्गोरिद्म में दिए गए चरणो व प्रक्रियाओं को नही समझ पाते।

उदाहरण – 14 वर्षीय अजय को 312–47 हल करने को कहा गया। उसने लिखा,

3	1	2
-1 ~~0~~	~~4~~ 5	7
2	6	5

जब उससे पूछा गया कि उसने 4 काटकर 5 क्यों लिखा, तो उसने बताया, ''2 तो 7 से छोटा है। इसलिए मैं एक उधार लेता हूं। फिर मुझे नीचे एक वापिस करना है।'' उससे फिर पूछा गया, ''लेकिन तुमने यह एक नीचे क्यों जोडा?'', ''उसने सफाई देते हुए कहा'', लेकिन यह गलत नही है। अगर मै 265 और 47 को जोडूंगा, तो 312 आएंगा।

जाहिर है कि इस बच्चे को तरीका लागू करना संक्रिया का अर्थ पता है। लेकिन वह इन दोनो बातो का संबंध नही जोड़ पा रहा है।

[?] अगर कोई बच्ची मौखिक रूप में किसी सवाल को आसानी से कर पा रही है लेकिन लिखित रूप में उसे कठिनाई आ रही है, तो बताइये कि इसका कारण क्या हो सकता है?

E5) बच्चे द्वारा किसी ऐल्गोरिद्म का उपयोग कर पाना और उसमें निहित अवधारणाओं व प्रक्रियाओं को समझा सकना, इन दोनो के बीच आपके अनुसार क्या सम्बंध है? यदि कोई बच्ची यह नही समझ पाती है कि कोई ऐल्गोरिद्म कैसे काम करता है, तो आप इस स्थिति को कैसे सभालेंगे?

बच्चों को किसी गणितीय अवधारणा से सम्बंधित विभिन्न शब्द समझने में मदद देने के लिए हम रोचक कहानियों का सहारा ले सकते है। लेकिन बच्चों के लिए अमूर्त अवधारणाएं बिना संदर्भ के सीखना मुश्किल होता है।

उदाहरण – अपने स्कूल में 4 वर्षीय शीला का सम्पर्क संख्याओं व ठोस वस्तुओं के साथ छोटी संख्याओं के जोड़ से हो चुका था। एक दिन शिक्षक ने उससे पूछा, ''दो और एक कितने हुए?'' शीला जवाब न दे सकी थोड़ी देर रूककर शिक्षक ने बातचीत की।

शिक्षक : दो पत्थर और एक पत्थर मिलाकर कितने पत्थर हुए?
शीला : तीन पत्थर।
शिक्षक : तो दो और एक कितने हुए?
शीला : (हिचकिचाते हुए) चार
शिक्षक : एक पत्थर, और एक और पत्थर कितने पत्थर?
शीला : दो पत्थर
शिक्षक : तो एक और एक कितने?
शीला : एक, शायद।

शीला के लिए पत्थर वाले प्रश्न और संख्या वाले अमूर्त सवाल का कोई संबंध नही है। शायद वह यह सोच रही हो, "इसका उत्तर तो मुझे पता नही। मगर इसका उत्तर जरूर पत्थर वाले सवाल से अलग होगा।"

यह उदाहरण दर्शाता है कि बच्चों को उनके अनुभवो से ज्यादा व्यापक स्थितियों तक पहुचने में मदद करना थोड़ा पेचीदा काम है। उन्हें विशिष्ट संदर्भ में इस्तेमाल होने वाली भाषा और उसमें मौजूद तर्क को समझना होगा।

जब एक बार कोई बच्ची गणित की भाषा से थोड़ा–बहुत परिचित हो जाती है, तो वह इस स्थिति में होती है कि भाषा की शक्ति को संप्रेषण के ऐसे साधन के रूप में महसूस कर सकें, जो संक्षिप्त है और स्पष्ट है। जब वह इस भाषा का उपयोग करने लगेगी, तो वह यह भी देख पाएगी कि भाषा संक्षिप्तता, स्पष्टता और व्याकरण के लिहाज से कैसे उसकी रोजमर्रा की भाषा से अलग है।

विभिन्न प्रतीक सीखते वक्त बच्चों को तरह–तरह की दिक्कतें आ सकती हैं, जैसे :

i) 32 और 3/2, या 2X और X^2 जैसे व्यंजको के बीच फर्क न कर पाना।

ii) शब्दो में '=' व्यक्त करने के अलग–अलग तरीके। जैसे, 8–2 = 6 को पढ़ा जाता है 'आठ मे से दो गए तो छः बचे' और 6+2 = 8 को पढ़ा जाएगा 'छः मे दो जोड़े तो हुए आठ'।

iii) एक ही गणितीय तथ्य को कई तरह से प्रस्तुत किया जा सकता है। जैसे 8–2 = 6 को 6+2=8 के रूप में भी देखा जा सकता है। इसी प्रकार से 7 = 3+4 और 3+4 = 7 एक ही बात है। लेकिन बच्चे इससे भ्रमित हो जाते हैं। उन्हें समीकरण का दूसरा रूप (यानि 3+4=7) समझना ज्यादा आसान लगता है बजाय पहले (यानि 7=3+4) के।)

iv) 5 + 3 = 8 जैसे वाक्य से 5 + 3 = 3 + 5 जैसे वाक्य पर पहुंचना। (बच्चों को समीकरणों को वाक्यों के रूप मे देखने से आगे बढ़कर उन्हें संख्याओं के सम्बंध के रूप मे देखना सीखना होगा।)

बच्चों के साथ हुए वार्तालापों के कुछ अंशः–

- सुहानी को □ = 4 + 5 करने को दिया गया। उसने उंगलियो पर गिनकर लिखा 9=4 । 5, मगर पढ़ा 4 धन 5 बराबर 9" वह कहती भी है, "4+5 = 9 ज्यादा अच्छा है बजाय 9 = 4+5 के क्योंकि मुझे इसे (यानि = 9 को) उस तरफ रखने की आदत है।"
- जब 6 वर्षीय फातिमा को, 3+2 = 2+3 दिया गया, तो उसने कहा, "आप 5 लिखना भूल गए।" फिर उसने लिखा 3+2 = 5 और 2+3 = 5
- 7 वर्षीय मोहन 3+2 = 2+3 को सही मानता है "क्योंकि दोनो में एक ही संख्याएं है। सिर्फ 2+3 उल्टा है।"
- दिशा, ने 3+2 = 2+3 को सही नही माना। उसने उसे बदलकर लिंखा 3+2+2+3 = 10

इन उदाहरणों से पता चलता है कि जब हम बच्चों द्वारा सवाल हल करने के प्रयासो को देखें, तो हमें उस गणितीय भाषा पर भी विचार करना चाहिए जिसमें ये सवाल लिखे जाते हैं। जब हम बच्चों कें सामने सवाल या हल प्रस्तुत करें, तो जरूरत इस बात की है कि हम इन्हें अलग–अलग रूपों में प्रस्तुत करे। वरना हो सकता है कि बच्चे, मसलन, यह माननें लगें कि '=' चिन्ह तभी लगाया जा सकता है जब उसके पहले एक या ज्यादा गणितीय संक्रियाओं का चिन्ह आ जाए। हो सकता है कि वे यह भी समझने लगें कि सवाल का उत्तर हमेशा बराबर' चिन्ह के बाद ही आता है।

E6) आप कक्षा में कैसे व किस मोड़ पर गणितीय प्रतीको और वाक्यों से बच्चों का परिचय कराते है? ऊपर के उदाहरणों को पढ़ने के बाद आप इसमें क्या परिवर्तन करना चाहेंगे?

गणितीय 'वाक्य' जिनमें एक ही संक्रिया शामिल हो, सीख लेने के बाद ही बच्चों की मुश्किलें खत्म नही हो जाती। उन गणितीय कथनो को पढ़ने में और भी ज्यादा मुश्किलें सामने आती हैं, जिनमें एक से ज्यादा

संक्रियाएं शामिल हों। इनमें पूरे समीकरण को सही–सही पढ़ना होगा और संक्रियाओं को एक विशेष क्रम मे लागू करना होगा। कोष्ठकों के प्रवेश के साथ ही प्रतीकों की संख्या बढ़ जाती है।

उदाहरण – 9 वर्षीय गुल को गणितीय कथनो में कोष्ठकों का उपयोग सिखाया जा चुका था। इन प्रतीको की उसकी समझ आंकने के लिए उसे 5 + 2 X 3 = ... हल करने को कहा गया।

प्रश्नकर्ता	:	बाईं ओर का मान क्या है?
गुल	:	21
प्रश्नकर्ता	:	कैसे निकाला?
गुल	:	5+2 बराबर 7 हुआ और 7 X 3 = 21 होगा।

जब उससे इसी कथन में कोष्ठक लगाने को कहा गया, तो उसने पहली दो संख्याओं को भी कोष्ठकों में डाल दिया, यानि (5+2) X 3 कर दिया। इसमें बाएं से दाएं का वह क्रम भी बरकरार रहा, जिसका वह पालन कर रही थी।

जब उससे पूछा गया कि क्या वह कोष्ठक को कही और भी लगा सकती हैं, तो उसने पूरे कथन को ही कोष्ठक में घेर दिया, यानि (5 + 2 X 3) कर दिया। सवाल हल करने की उसकी क्रिया, उसकी व्याख्या से मेल खाती थी :

प्रश्नकर्ता	:	तुम कोष्ठक क्यों लगाती हो?
गुल	:	इससे पता चलता है कि पहले कौन सा करना है।

इससे पता चलता है कि बच्चों को नए प्रतीक शब्द/प्रक्रियांएं बताते वक्त बहुत धैर्य की जरूरत होती है। जरूरत इस बात की होती है कि हम उन्हें नई लिखित भाषा का उपयोग करने के कई अवसर प्रदान करें। वे जिस वस्तु का उपयोग कर रहें हैं, उसके बारे में, उसके इस्तेमाल के बारे में बात करने के उन्हें कई सारे अवसर मिलने चाहिए।

E7) आप बच्चों को कोष्ठकों के उपयोग का मकसद व उपयोग का तरीका समझाने में कैसे मदद करते हैं?

बच्चो की पहली भाषा से सम्बंधित एक और समस्या यह है कि कई बार वे देखते है कि गणित में कुछ ऐसे शब्दों का उपयोग होता है जो उनकी बोलचाल की भाषा से लिए गए है, जैसे 'जोड़ना', 'अन्तर', आदि। यदि गणित में भी इन शब्दों का अर्थ वही हों, तो बच्चों को कोई मुश्किल पेश नही आती। लेकिन अगर गणित में इन शब्दो का उपयोग अलग ढंग से होता है, तो बच्चो को दिक्कत होती है।

उदाहरण – "11 और 6 में क्या अन्तर है?" यह सवाल पूछे जाने पर एक बच्चे ने जवाब दिया कि 11 में दो अंक हैं। जाहिर है, इस जवाब को शिक्षक ने गलत माना। एक और बच्चे ने जवाब दिया कि 11 सीधा है जबकि 6 घुमावदार है। इसे भी शिक्षक ने गलत करार दिया। जाहिर है कि 'अन्तर' शब्द के अर्थ को लेकर बच्चों व शिक्षक में मतभेद था।

प्रारम्भिक कक्षा के स्तर पर यदि बच्चो से 1 में 4 जोड़ने को कहा जाए, तो भी समस्या आ सकती है। जोड़ने का अर्थ यह भी हो सकता है कि 4 को 1 के आगे जोड़ दें, या पीछे जोड़ दें ऐसा करने से जाहिर है कि बच्चों के उत्तर अलग–अलग आएंगे, और कुछ लोग शायद सभी उत्तरो को जायज मानें।

E8) ऐसे कुछ उदाहरणों की सूची बनाइए जिनमें शिक्षक द्वारा सोचा गया अर्थ और बच्चों द्वारा समझे गए अर्थ में अन्तर होता है?

इस प्रकार गणित की भाषा संक्षिप्त, सटीक व तार्किक होती है। इन गुणो की वजह से यह एक सशक्त भाषा है। बच्चों को जरूरत हैं इस भाषा के इस्तेमाल को सीखने की। बच्चे गणितीय व्यंजको और समीकरणो को पढ़ने तथा उनसे जानकारी हासिल करने की क्षमता विकसित करें व समझना चाहिए कि समीकरण दरअसल

किसी स्थिति, सवाल या घटना को व्यक्त करने का संक्षिप्त तरीका है। इस भाषा को सीखने में बच्चों को मजा आए, इसके लिए जरूरी है कि हम इसे धीरे–धीरे सही जगहो पर और काफी अभ्यास के जरिए प्रस्तुत करें। बच्चो को गणित की भाषा बोलने व लिखने के लिए प्रेरित किया जाना चाहिए। इस तरह से बच्चे इसे आत्मसात् कर पाएंगे।

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित बातों पर चर्चा की।

1) भाषा के उपयोग का असर बच्चों द्वारा गणित की अवधारणाएं सीखने पर पड़ सकता है, क्योंकि भाषा की मदद से ये अवधारणाएं उनके दिमाग में बैठ जाती है।

2) इबारती सवालों को करते वक्त, गणित की किताबें पढ़ते वक्त या उन्होंने जो कुछ समझा है उसे समझाते वक्त बच्चों को गणितीय भाषा के साथ–साथ रोजमर्रा की भाषा का भी उपयोग करना होता है।

3) बच्चों की इबारती सवालों को समझने में और हल करने में मदद के तरीके।

4) किसी एल्गोरिद्म को लागू कर पाने का मतलब यह नहीं होता कि उसे सीखा जा चुका है।

5) ऐल्गोरिद्म याद रखने के लिए किसी विशिष्ट संदर्भ या अवधि मे उपयोगी शार्टकट या गुर पकड़ लेना खतरनाक भी हो सकता है। इनकी वजह से बच्चे कई बार गलत व्यापकीकरण करते हैं और गलत अवधारणा पकड़ लेते हैं।

6) गणितीय भाषा से बच्चों का परिचय धीरे धीरे सही जगह पर, काफी अभ्यास के साथ इस ढंग से कराया जाना चाहिए कि वे इस भाषा को ज्यादा गहराई से समझने और जानने लगें।

इकाई 1 के पाठ 1, 2, 3 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

पाठ 1 : गणित का स्वरूप

अभ्यास पर टिप्पणियाँ

E3 उदाहरण के लिए, दो प्राकृत संख्याओं का योग एक प्राकृत संख्या होती है। किसी प्राकृत संख्या n के लिए $\frac{1}{n}$ $\frac{1}{n+1}$ से बड़ा होता है। ऐसे ही अन्य उदाहरण सोचिए।

E4 'मूर्त से अमूर्त' निश्चय ही व्यापकीकरण की ओर बढ़ता है। लेकिन विशिष्ट से व्यापक अमूर्त स्थिति से और अमूर्तता की ओर जाना हो सकता है जैसे वर्गों को चतुर्भुजों में व्यापकीकृत करना।

E5 उदाहरण के लिए N में योग गुणन में व्यापकीकृत होता है, जो Q (परिमेय संख्याओं का समुच्चय) में गुणन में व्यापकीकृत होता है ज्यामिती में n- भुजाओं के बहुभुजों का सोपानक्रम है।

बीजगणित से एक उदाहरण किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए ऐल्गोरिदम हो सकता है, जिसे किसी संख्या का घनमूल, चतुर्थमूल आदि मालूम करने के लिए व्यापक किया जा सकता है।

E7 उदाहरण के लिए, जब लोग कहते हैं कि दुनिया गोल है, तो ऐसा नहीं है क्योंकि पृथ्वी पूरी तरह से गोल नहीं है।

E11 (i) यह मान कर कि त्रिभुज के अन्तकोण का योग 180° होता है, इसे सिद्ध करने का प्रयास कीजिए।

(ii) आप या तो यह सिद्ध कर सकते हैं कि योग 540° होता है या एक ऐसा उदाहरण दे सकते हैं जिसमें योग 450° नहीं है।

पाठ 2 : गणित के तत्व

E1 उदाहरण के लिए, गणितीय अवधारणाएँ हो सकती हैं "बंद और खुली आकृतियाँ" और गैर गणितीय विचार हो सकते हैं "गर्म" या तेजी।

आप सोचिए कि इनमें से प्रत्येक अवधारणा बच्चे के दिमाग में कैसे विकसित होती है।

एक छोटी बच्ची को यह नहीं पता होता कि 'गर्म' क्या है? किस तरह के अनुभवों से वह धीरे–धीरे इस अवधारणा को समझ पाती है? वह यह तुलना करना और मालूम करना कैसे सिखती है कि क्या ज्यादा गर्म है? ऐसे कुछ संभव अनुभवों को लिखिए और बताइए कि वे उसे किस तरह 'गर्म' के विचार का अमूर्तीकरण करने में मददगार होंगे।

E2 मूर्त से अमूर्तीकरण करना, अमूर्तीकरण का एक रूप है। जैसे– पेन, बॉलपेन, पेन्सिल आदि से लिखने वाली वस्तुओं की अवधारणा का अमूर्तीकरण होता है। ऐसे ही कुछ उदाहरण दीजिए।

दूसरी तरह का अमूर्तीकरण, उन विचारों का अमूर्तीकरण है जिनका अस्तित्व वास्तविक दुनिया में नहीं होता। जैसे ऋणात्मक संख्याओं की अमूर्त अवधारणा की समझ बनाना।

E4 प्रक्रियाओं का व्यापकीकरण भी किया जा सकता है। जैसे कि अगर हम एक तरह की दाल पकाना जानते हैं, तो इसी तरीके से प्रेशर कूकर को इस्तेमाल करके हम अन्य दालों को भी पका सकते हैं। इसी तरह सब्जी पकाने के तरीके को भी व्यापक तौर पर लागू किया जा सकता है। ऐसे ही अन्य गणितीय व गैर गणितीय प्रक्रियाओं के उदाहरण दीजिए।

E5 हम जानते हैं कि आम तौर पर जब लोग खुश होते हैं या जब वे दोस्ताना बर्ताव करना चाहते हैं, तो वे मुस्कराते हैं। चूंकि यह बात व्यापक तौर पर सही है इसलिए जब हम एक अनजान इंसान से मिलते हैं और वह मुस्कराता है तो हम यह मान कर चलते हैं कि वह हमसे दोस्ती करना चाहता है। यह विशिष्टीकरण का एक उदाहरण है।

E6 ऐसे कई उदाहरण हो सकते हैं जिनमें व्यापकीकरण गलत हो। जैसे हम जानते हैं कि जब दो प्राकृत संख्याओं का गुणा किया जाता है तो गुणज इनसे बड़ी संख्या या उन संख्याओं में से बड़ी संख्या होती है। लेकिन यह बात भिन्नों पर लागू नहीं होती और इस तरह का व्यापकीकरण गलत होगा। ऐसे ही संभव व्यापकीकरण के उदाहरण दीजिए जो गलत है।

E7 (क) जानिए कि कथन $n = 1$ के लिए सही है।

माना कि यह $n = k$ के लिए सही है।

तो $1 + 2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + k =$

अब $1 + 2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (k + 1) = 1 + 2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + k + (k + 1)$

$$= \quad + (k + 1)$$

$$= \frac{(k+1)}{2}$$

इसलिए $n > 1$ यह कथन सही है।

(ख) आप जानते हैं कि त्रिभुज के आंतरिक कोणों का योग 180° होता है। एक समबाहु त्रिभुज में 3 समान आंतरिक कोण होते हैं इसलिए समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° होगा जो है। आप बहुभुज में आंतरिक कोणों के बारे में, समबहुभुज की परिभाषा व इसकी भुजाएँ और इसलिए इसके सभी आंतरिक कोणों का अंशमान एक है, का इस्तेमाल भी करिए, फिर देखें कि आप दिए गए कथन को सिद्ध कर सकते हैं या नहीं।

E8 उदाहरण के लिए अगर m_1 और m_2 दो सम संख्याएँ हो तो $m^2_1 + m^2_2$ एक संख्या का वर्ग होगा। इसे सिद्ध या असिद्ध करे।

एक अन्य कथन कि "दो विषम संख्याओं का योग सम है।" इसे भी देखें कि यह सत्य है या असत्य। इसके लिए आपको सबसे व्यापक विषम संख्या लेनी होगी। मान लीजिए कि यह $2n_1+1$ और $2n_2+1$ है जहाँ $n_1 + n_2$ प्राकृत संख्या है।

E9 चरण 5 को देखिए यहाँ हमने a–b का दोनों तरफ भाग दिया है। चरण 1 में हमने माना था कि a = b इसलिए a–b से भाग देने का मतलब है कि हम चरण 5 में दोनों तरफ 0 से भाग दे रहे हैं जो कि गणितीय तौर पर सही नहीं है।

पाठ 3 : भाषा का विकास

E3 (i) एक ही गणितीय कथन कई अलग–अलग स्थितियों को निरूपित कर सकता है।

(ii) एक ही स्थिति को अलग–अलग इबारती सवालों के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।

(iii) इबारती सवालों को किसी ऐल्गोरिद्मी तरीके से प्रस्तुत नहीं किया जाता है इसलिए इन्हें समझने में देर लगती है।

ऐसे ही अन्य कारण आप सोचिए।

E4 उदाहरण के लिए जिनमें कुछ खिलाड़ियों के बीच 4–4 पत्ते बाँटने हो या किसी कक्षा के लिए बेंचों की संख्या पता लगाना हो, आदि।

E5 '4 + 3 = 7' को दर्शाने के कुछ तरीके नीचे दिए गए हैं।

(i) चार और तीन सात

(ii) चार और तीन जुड़कर सात होते हैं।

(iii) चार और तीन का योग सात होता है।

(iv) सात, चार से तीन ज्यादा है।

(v) चार में तीन जोड़े तो सात आएगा।

(vi) चार, सात से तीन कम है।

इसी तरह के कुछ तरीके आप भी बताइए। व्याख्या कीजिए।

E7 जैसे कि ऐसे बच्चे और कई वयस्क भी, जो जल्दी से किसी सवाल को सही–सही हल कर देते हैं, कई बार उनमें शामिल गणित को नहीं जानते। किसी विधि को ठीक तरीके से लागू कर पाने का मतलब यह नहीं है कि हम उन संक्रियाओं को समझते हैं जिनके लिए ये विधियाँ बनी हैं। बतौर शिक्षक हमें इस बात के प्रति सचेत रहना चाहिए।

E8 आप इस बात पर ध्यान दीजिए कि बच्चों को इन प्रतीकों का अर्थ तथा उनके परस्पर संबंधों की समझ विकसित करना है।

E9 जैसे कि गणित की प्रतीकात्मक भाषा की समझ हासिल करने के लिए बच्चों को अवसर प्रदान करने के लिए क्या किया जाना चाहिए। ऐसे कौन से अनुभव होंगे जिनमें बच्चों को कोष्ठक सहित गणितीय समीकरण और व्यंजक समझने में मदद मिलेगी?

E10 उदाहरण के लिए बच्ची यह सोच सकती है कि $4\,(-5) = -1$ होगी। उसने यहाँ कोष्ठक को अनदेखा कर दिया है क्योंकि वह उसका अर्थ समझ नहीं पाई। ऐसे ही कुछ उदाहरण सोचिए।

इकाई – 2
भिन्नात्मक संख्याएँ

पाठ – 4 भिन्न की संक्रियाएं

जोड़ और घटाव की समझ को विकसित करना – असमान हर की भिन्न का जोड़ – भिन्नात्मक संख्याओं में घटाना – भिन्नात्मक संख्याओं में संक्रियाएं व भाषा – गुणा और भाग की समझ को विकसित करना – समूह में सवाल करना – संक्रिया करने में गलतियाँ।

पाठ – 5 भिन्नों में सूत्रविधि पर चर्चा

सूत्र विधियों पर एक बारीक नजर – भिन्न संबंधी सूत्र विधियाँ – सूत्रविधि के उपयोग में गलतियाँ – भिन्नात्मक संख्या का गुणा व सूत्रविधि – भिन्नात्मक संख्या व अनुमान।

पाठ – 6 दशमलव के रूप में व्यक्त भिन्नों पर चर्चा

दशमलव भिन्न मुश्किल क्यों है? – दशमलव भिन्न में स्थानीय मान – जोड़ना और घटाना – शार्टकट की गफलत – सूत्रविधि बच्चे कैसे समझें – गुणा और भाग – दशमलव भिन्नों का अनुमान – अनुमान लगाना सीखना – सन्निकटन कैसे करें – अनुमान व उत्तर की जाँच।

आमतौर पर देखा जाता है कि भिन्न के सवालों को हल करना न केवल कुछ बच्चों के लिए बल्कि बड़ों को भी कठिन लगता है। भिन्न को समझने में निम्नलिखित दो मुख्य बाधाएँ आती हैं–

(1) भिन्न को अक्सर एक स्वंतत्र इकाई मानते हैं, जबकि भिन्न का अर्थ तभी सार्थक होता है जब उसे उस 'पूर्ण' के साथ लिया जाए जिसका वह एक हिस्सा है।

(2) जटिल संकेत चिह्न।

भिन्नों और दशमलवों के साथ संक्रिया करने में कठिनाइयां आती हैं क्योंकि इनके कई अर्थ हो सकते हैं, जैसे– $\frac{3}{5}$ (या 0.6) को प्रत्यक्ष रूप में कई तरीकों से व्यक्त कर सकते हैं, जो हमारी रोजमर्रा की जिन्दगी से संबंधित है।

कई बार बच्चे इन सवालों को बिना सोचे समझे मात्र रट–रटकर याद कर लेते हैं और उनमें छिपी संकल्पना को नहीं समझते। इस सबक में हमने भिन्न संख्याओं की संक्रियाओं को करते समय बच्चे किस तरह गलतियां करते हैं, उन्हें समझने का प्रयास किया है। साथ ही दशमलव भिन्नों पर भी चर्चा की गई है।

पाठ – 4
भिन्न की संक्रियाएं

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- जोड़ और घटा की समझ को विकसित करना
- क्या भिन्न का जोड़ एक से अधिक हो सकता है?
- असमान हर के भिन्न की जोड़
- भिन्नों की जोड़ के नियम
- भिन्नात्मक संख्याओं में संक्रियाएँ व भाषा
- गुणा व भाग की समझ को विकसित करना
- सारांश

परिचय

इस पाठ में हम देखेंगे कि भिन्न संख्याओं के साथ चार क्रियाएं करते वक्त जो गलतियाँ और गलतफहमियाँ होती हैं, वे पूर्ण संख्याओं से अलग हैं। कई व्यापकीकरण जो वह पूर्ण संख्याओं के संदर्भ में करते हैं, वह यहाँ गलत हो जाते हैं। लिहाजा इनसे निपटने में बच्चों की मदद करने के लिए सिखाने के अलग–अलग तरीके अपनाने होंगे। इस पाठ में हम ऐसी संकल्पनाओं व हुनर की चर्चा भी करेंगे जिन्हें सीखने पर वे भिन्न संख्याओं पर चारों संक्रियाओं को सरलता से कर सकेंगे तथा हमने कई ऐसे शिक्षण साधनों की चर्चा की है, जिनका उपयोग करके इन संक्रियाओं को सही ढंग से समझने में बच्चों की मदद की जा सकती है।

उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- ऐसे कई गतिविधि आधारित तरीके इस्तेमाल कर पाएंगे जिनसे बच्चों को भिन्न संख्याओं के जोड़, घटा, गुणा व भाग सीखने में मदद मिलेगी।
- भिन्न संख्याओं का संयोजन करने के नियम समझने में मदद कर पाएंगे।
- अपने सिखाने के तरीकों का निरन्तर मूल्यांकन करने के तरीके विकसित कर पाएंगे।

जोड़ और घटाव की समझ को विकसित करना

एक हताश गणित शिक्षक का कहना था, "मैंने कितनी बार इन्हें बताया कि दो भिन्नों को कैसे जोड़ते हैं। फिर भी ये $\frac{2}{3}+\frac{4}{8}$ का उत्तर निकालने में गलती करते हैं। कुछ ने इसका उत्तर $\frac{6}{8}$ लिखा है तो कुछ ने $\frac{6}{11}$ ....।"

यह उन्होंने तब कहा, जब वे कक्षा 4 के बच्चों की उत्तर पुस्तिकाएं जांच रही थीं। क्या आपने ऐसी टिप्पणियां अन्य शिक्षकों से भी सुनी है?

इस मामले में वे ज्यादा हताश इसलिए थीं क्योंकि वे यह नही समझ पा रही थी कि उनके विद्यार्थी भिन्न के जोड़ के सिद्धांतों को क्यों नहीं समझ पा रहे।

मैंने सोचा कि उन्हें थोड़ा सोचने के लिए उकसाया जाए। इसलिए मैंने उनसे निम्नलिखित सवाल किए–

- क्या आप जानती हैं कि बच्चों में जोड़ को लेकर और भिन्न को लेकर क्या धारणा है?
- क्या आपने उनके उत्तरों का अध्ययन किया है? क्या उसमें कोई पैटर्न दिखता है? क्या कभी यह सोचा है इस पैटर्न के संभावित कारण क्या हो सकते हैं?
- क्या आप कुछ ऐसा कार्य सोच सकती हैं जो इस मामले में बच्चों की समझ बढ़ाने में मदद कर सके।

थोड़ी देर सोच कर वे बोले, "शायद मैंने ऐसा नहीं किया" मैंने ऐसे तरीके भी नहीं सोचे जिनसे बच्चों को यह संकल्पना समझने में मदद मिले। मैं तो बस जोड़ को कैसे करना है एक ही तरीके से बताती गई।" उन्होंने फैसला किया कि वे बच्चों के लिए सीखने व अभ्यास के वैकल्पिक तरीके सोचेंगी और वे यह मान गईं कि एक ही व्याख्या को दोहराना बच्चे को संकल्पना सिखाने का अच्छा तरीका नहीं है।

कक्षा के इन उदाहरणों को देखें

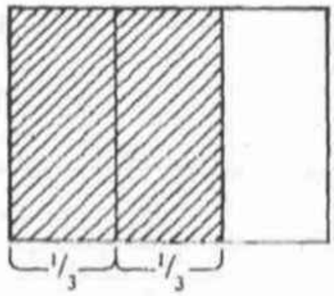
उदाहरण 1 : एक प्रायमरी स्कूल की शिक्षक कक्षा 4 के बच्चों की गलतियां सुधारने का प्रयास कर रही थी। ये बच्चे $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$ जैसी गलतियां करते थे। बच्चों से बातचीत करने पर उसे लगा कि बच्चों ने 'जोड़ का नियम' मात्र रट लिया है। उन्हें यह नहीं समझ आया है कि नियम कैसे लागू होता है। इसलिए वह बगैर समझे नियम लागू करने का प्रयास करते हैं। उसने बच्चों को इस नियम को ठोस उदाहरण देकर समझाने का प्रयास किया।

उसने सबसे पहले यह प्रश्न लिया कि आखिर $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ होता क्या है?

उसने हर बच्चे को एक–एक कागज दिया और खुद भी एक कागज लिया। उस कागज को तीन बराबर भागों में मोड़कर उसने वापस खोला (चित्र 1)। बच्चों से भी वैसा ही करने के लिए कहा।

चित्र 1 : एक कागज़ जिसे तीन बराबर हिस्सों में बांटा गया है।

शिक्षक : कागज का हर हिस्सा कितना भाग दर्शाता है?



चित्र 2

बच्चे : $\frac{1}{3}$ ।

शिक्षक : पहले हिस्से को रँगों, उस पर $\frac{1}{3}$ लिख दो। अगले हिस्से को रँगकर उस पर भी $\frac{1}{3}$ लिखो (चित्र 2)। जब बच्चों ने यह कर लिया तो फिर पूछा, "रंगीन भाग में कितने हिस्से हैं?"

बच्चे : दो।

शिक्षक : इसमें तीन में से दो हिस्से रंगे हैं यानी रंगीन हिस्सा रँगे कितना भाग दर्शाता है?

बच्चे : $\frac{2}{3}$ ।

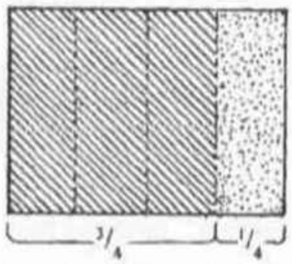
शिक्षक : तो क्या $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ हुआ?

बच्चे : जी मैडम।

शिक्षक : अब $\frac{3}{4}$ और $\frac{1}{4}$ को जोड़ो। एक नया कागज लो। इसे कितने भागों में मोड़ेंगे?

बच्चे : चार।

शिक्षक : ठीक। कागज को चार भागों में मोड़ो। पहले तीन भागों में रेखाएं बना लो। यह हुआ $\frac{3}{4}$ । अब बच्चे एक भाग को बिन्दुओं से भर लो (चित्र 3)। अब बताओ रेखावाला भाग अब कितना दर्शा रहा है?



चित्र 3

बच्चे : 3 बटा 4 (शिक्षक बोर्ड पर $\frac{3}{4}$ लिखती है।)

शिक्षक : और जिसमें बिन्दु हैं वह भाग ?

बच्चे : एक बटा चार।

शिक्षक : तो कागज का कितना भाग भरा है?

बच्चे : पूरा का पूरा कागज भरा है।

शिक्षक : इसका क्या मतलब हुआ? $\frac{3}{4}$ और $\frac{1}{4}$ का जोड़ कितना है?

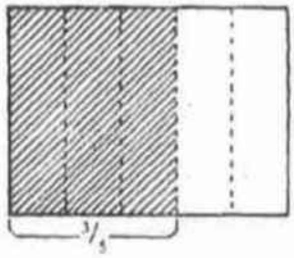
बच्चे : 1 है।

शिक्षक : यानी $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$?

क्या भिन्न का जोड़ पूरे एक से अधिक हो सकता है :

इसके बाद शिक्षक और आगे बढ़ी। वह जानती थी कि बच्चों को विषम भिन्न यानी ऐसे भिन्न जो एक से बड़े हैं, के साथ काम करने में परेशानी होती है। उसने $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$, को समझाने की सोची। इस बार उसने बच्चों से पूछा कि कैसे आगे बढ़ें?

सुनीता : कागज को पांच बराबर भागों में मोड़ेंगे। उसमें से 3 लेंगे। $\frac{3}{5}$ का मतलब है 5 भाग में से 3 भाग। (चित्र 4) अब $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$ का मतलब है हमें कागज के बाकी हिस्से में तीन और भागों में रंग भरना है (बच्ची रूक गई) मगर अब तो 2 ही हिस्से बचे हैं। अब क्या करें ?

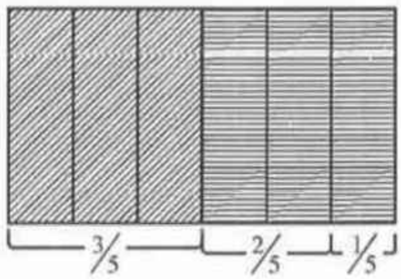


चित्र 4

शिक्षक ने बाकी बचे दो भागों को आड़ी रेखाओं से भर दिया और पूछा अब बताओ यह क्या दर्शाता है? क्या हम एक और कागज ले सकते हैं?

महिमा : यह पाँच भाग पूरे के पूरे रँग गए। यह तो 1 हो गया। बाकी के लिए एक और कागज को पांच भागों में मोड़ें तो काम बन सकता है। इसमें से भी 1 भाग लें। इस प्रकार कुल तीन भाग और हो जाएंगे।

शिक्षक ने पहले जैसा एक और कागज लेकर उसे पांच बराबर भागों में मोड़ा और फिर एक भाग को आड़ी रेखाओं से भर दिया। इस एक भाग को काटकर निकाला और पहले कागज के साथ सटाकर रख दिया (चित्र 5)।



चित्र 5 : $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$ को समझना

रमेश : यह क्या हुआ? यह तो 1 से ज्यादा है।

मुन्नी : हाँ, एक से तो ज्यादा है, पर कितना है?

मोहन : (थोड़ा रूककर) यह तो एक पूरे से एक हिस्सा ज्यादा है।

शिक्षक : कितने हिस्सों में से एक हिस्सा ज्यादा है?

बच्चे : पांच में से एक ज़्यादा लिया है।

शिक्षक : क्या इसका मतलब यह हुआ कि जोड़, 1 से $\frac{1}{5}$ भाग ज्यादा है?

बच्चे : जी।

शिक्षक : तो फिर $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$ कितना हुआ?

एक छात्र : एक और एक बटे पाँच यानी 1 + $\frac{1}{5}$

दूसरा छात्र : $1\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$ होगा। यानी $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5}{5}+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

शिक्षक ने तीन उदाहरण और करवाए –

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}$, $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$

फिर उसने पूछा क्या अब तुम कागज मोड़े बिना बता सकते हो कि $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=$ क्या होगा?

एक बच्चा : $\frac{6}{7}$ मैडम।

शिक्षक : बहुत बढ़िया ! कैसे पता लगाया?

बच्चा : अंश की संख्याओं को जोड़ दिया और समान हर को लिख दिया।

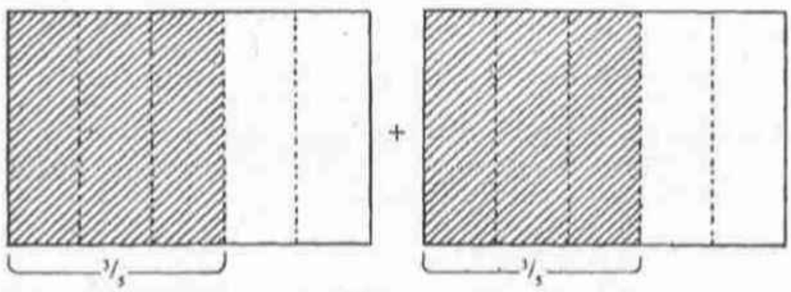
शिक्षक : शाबाश। क्या तुम्हें याद है कि समान हर वाली भिन्नों को क्या कहते हैं?

कुछ बच्चे : जी मैडम। उन्हें समान भिन्न कहते हैं।

शिक्षक : बढ़िया। तो समान भिन्नों का जोड़ निकालने के लिए हम उनके अंशों को जोड़ देंगे और हर वही रहेंगे जो उनके समान हर हैं।

इसके बाद शिक्षक ने बच्चों को ढेर सारे सवाल करने के लिए दिए।

नोट : सोचें कि बच्चों को $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$ समझाते वक्त शिक्षक ने एक टुकड़ा काटकर अलग से क्यों रखा? क्यों दो कागजों को सटाकर नहीं रखा? (चित्र 6)



चित्र 6

इसमें क्या समस्या हो सकती है?

ऐसा देखा गया है कि ऐसा करने पर बच्चों में यह धारणा बन सकती है कि $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ है। वे दोनों कागजों के कुल हिस्से 5 + 1 = 6 गिन लेते हैं। और ये भी कुल 5 + 5 = 10 हिस्सों में से 6 लिए हैं। वे अब हर के स्थान पर 10 लिख लेते हैं।

E1) क्या कागज मोड़ने की गतिविधि भिन्नों का जोड़ समझने का अच्छा तरीका है? अब उन्हें समान भिन्न घटाने के सवाल कैसे सिखाएंगे? जैसे– $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ ।

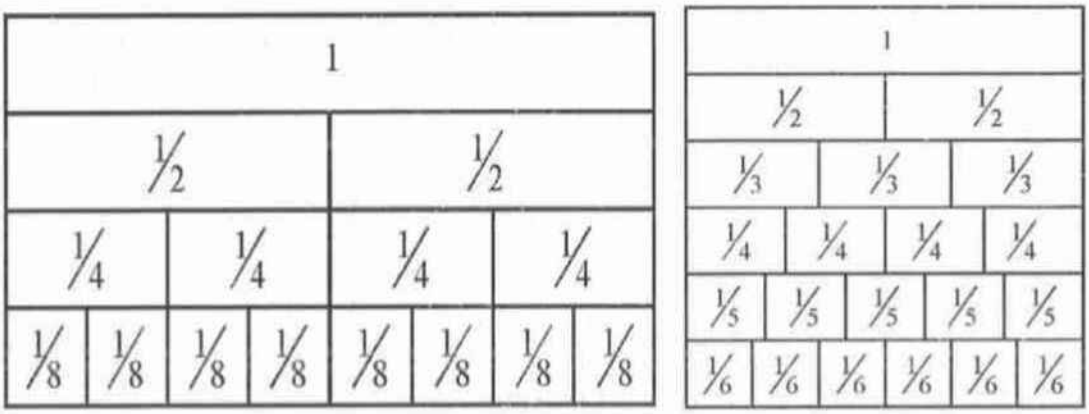
E2) भिन्नों के जोड़ व घटाव को सिखाने के लिए कोई सामूहिक गतिविधि सुझाइए।

E3) समान हर की भिन्नों के 10 सवाल बनाइए और हल कीजिए।

असमान हर की भिन्न का जोड़:

इस प्रकार समान भिन्नों के जोड़ को समझने की शुरूआत करने के लिए कागज मोड़ना एक कारगर शिक्षण साधन हो सकता है। लेकिन क्या यह तरीका असमान भिन्नों के जोड़ शुरू करने में भी उपयोगी है? देखें–

उदाहरण 2 : कक्षा में शिक्षिका कुछ 'भिन्न चार्ट' लेकर पहुंची (चित्र 7)। विद्यार्थी इनका उपयोग तुल्य भिन्न सीखने के लिए कर चुके थे। अतः वे इनसे परिचित थे। शिक्षक ने चार्ट को ब्लैकबोर्ड के पास रखा और यह जांचने की कोशिश की कि क्या बच्चे मिश्रित भिन्न और भिन्नों की तुल्यता समझ चुके हैं। भिन्न संख्याओं की क्रियाओं को समझने के लिए ये संकल्पनाएं जानना जरूरी है।



(क) (ख)

चित्र 7 : भिन्न संख्याओं के चार्ट

शिक्षक : $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$ क्या होगा?

सारे बच्चे : $\frac{1}{2}$

शिक्षक : $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=?$

बच्चे चिल्लाए: $\frac{2}{3}$ मैडम।

शिक्षक : $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$ = क्या होगा?

एक बच्चा : 1 होगा।

शिक्षक : क्यों?

राजू : (चार्ट की तीसरी कतार (चित्र 7 (ख)) की ओर इशारा करते हुए) मैडम हर हिस्सा $\frac{1}{3}$ है। पहले मैं दो हिस्सों में रंग भर दूंगा (रेखाएं डालकर) तो मुझे $\frac{2}{3}$ मिल जाएगा। फिर तीसरे हिस्से में रंग भरूंगा (अलग रेखाएं डालकर) तो $\frac{1}{3}$ और मिल जाएगा। अब पूरी पट्टी पर रंग है। इसलिए यह 1 हो गया।

शिक्षक ने यह देखा कि अधिकांश बच्चे इसको समझ गए हैं, अब वह आगे बढ़ी।

शिक्षक : अब बताओ कि $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ क्या होगा?

(कक्षा में चुप्पी छा गई।)

शिक्षक : क्या दिक्कत है?

राजू : मैडम, यदि ये दोनों संख्याएं एक ही पट्टी पर होतीं तो कर सकते थे। परन्तु ये दोनों तो अलग–अलग पट्टी पर हैं।

शिक्षक : ठीक। एक ही पट्टी की भिन्नों को देखो (चित्र 7) चार्ट की दूसरी कतार में पूरे (एक) को दो भागों में बांटा गया है। हर भाग $\frac{1}{2}$ दर्शाता है। तीसरी कतार में हर भाग पूरे का $\frac{1}{3}$ दर्शाता है।

यदि हम एक ही पट्टी पर $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ दिखाना चाहें, तो पूरे को कितने भागों में बांटना होगा? चलो, 4 भाग करके देखते हैं। चार्ट की चौथी कतार (चित्र 7 (ख)) में पूरे के चार भाग किए गए हैं। क्या इस पर $\frac{1}{2}$ दिखा सकते हैं?

एक लड़की : जी मैडम। 4 भागों में से दो भाग $\frac{2}{4}$ लें तो वह $\frac{1}{2}$ के बराबर है।

शिक्षक : क्या हम इस पर $\frac{1}{3}$ दिखा सकते हैं?

एक लड़का : नहीं मैडम। नहीं दिखा सकते।

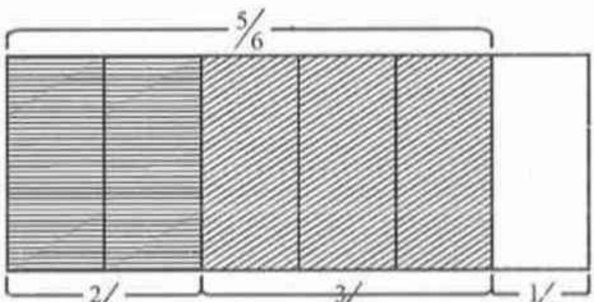
शिक्षक : चलो पांचवीं कतार को देखते हैं।

सारे बच्चे : नहीं मैडम। पांचवीं कतार में न तो $\frac{1}{2}$ दिखा सकते हैं और न $\frac{1}{3}$।

शिक्षक : और छठी कतार में? इसमें पूरे के 6 भाग हैं।

एक लड़का : जी हां मैडम। इस कतार में दोनों दिखा सकते हैं। हर भाग $\frac{1}{6}$ है। यदि हम 6 में से 2 भाग ले लें तो $\frac{2}{6}$ यानी $\frac{1}{3}$ हो जाएगा और यदि 6 में से 3 भाग ले लें तो $\frac{3}{6}$ यानी $\frac{1}{2}$ हो जाएगा।

शिक्षक ने बोर्ड पर एक पट्टी खींचकर उसे 6 भागों में बांट दिया। अब उसने एक बच्चे को बुलाकर कहा कि पहले 6 में से दो भागों को रंग दे और फिर बाकी बचे भागों में से 3 और भागों को रँग दे।(चित्र 8)



चित्र 8 : $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ समझना

शिक्षक : अब बताओ, कितने भाग रँगे हुए हैं?

बच्चे : 6 में से 5 भाग।

शिक्षक : यानी $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$

इसमें हमने दोनों भिन्नों के लिए ऐसी तुल्य भिन्न बनाई है जिनके हर समान हैं। फिर उन्हें समान हर भिन्न की तरह लिया।

शिक्षक ने इसके बाद $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ जैसे कुछ और अभ्यास करवाए। धीरे–धीरे बच्चे भिन्नों की जोड़ को आत्मविश्वास के साथ करने लगे।

E4 क्या आपको लगता है कि उदाहरण 2 में दर्शाई गई विधि बच्चों को भिन्न का जोड़ समझाने के लिए उपयोगी है। इसके फायदे व नुकसान क्या हो सकते हैं?

शिक्षक ने देखा कि हर बार बच्चे किसी सवाल की गणना के संदर्भ में तर्क करते, वे भिन्नों के जोड़ में पैटर्न पहचानने लगे थे। हालांकि उन्हें कोई नियम नहीं बताया था मगर वे खुद स्वाभाविक रूप से जोड़ के नियम की ओर बढ़ रहे थे।

भिन्नों की जोड़ के नियम : सबसे सरल है समान हर वाली भिन्नों को जोड़ना। जोड़ते समय अंशों को जोड़ना होता है और हर वही रहता है।

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

जब हर बराबर नहीं होता तो भिन्नात्मक संख्याओं को जोड़ने का नियम है,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+c\times b}{bd}$$

परन्तु यह नियम इतना अमूर्त है कि बच्चों के लिए इसे समझ पाना मुश्किल होता है। तुल्य भिन्न समझने, उनका अभ्यास करने व यह समझने से कि यह नियम बराबर हर वाली तुल्य भिन्नात्मक संख्याओं तक ले जाता है, इसे समझना व उपयोग करना सरल हो जाता है।

जोड़ सीखने–सिखाने के चरण :

अभी तक हमने जो चर्चा की उसके आधार पर हम कह सकते हैं कि भिन्नों के जोड़ सिखाने के तीन चरण होते हैं :

1. बच्चों को भिन्नों की तुल्यता की संकल्पना समझने के लिए काफी समय दिया जाना चाहिए। अन्य काम करने से पूर्व यह संकल्पना स्पष्ट रूप से समझ आ जानी चाहिए।
2. सर्वप्रथम समान हर वाली भिन्नों को जोड़ने की बात की जानी चाहिए। इसके लिए ठोस चीजों, चित्रों व मॉडलों का उपयोग करना चाहिए। इनसे उन्हें सामान्य पैटर्न देखने में मदद मिलती है।
3. असमान हर वाली भिन्नों का जोड़।

यदि बच्चे पहले दो चरण अच्छी तरह करते हैं तो उन्हें यह समझ में आ जाता है कि भिन्नों के जोड़ के लिए समान हर की जरूरत होती है। इस तरह से वे यह भी समझ जाते हैं कि क्यों हम जोड़ते वक्त मूल भिन्न की जगह समान हर वाली तुल्य भिन्न का उपयोग करते हैं। एक उदाहरण से बात स्पष्ट हो जाएगी।

भिन्नात्मक संख्याओं में घटाना :

एक शिक्षक, जिन्होंने अपने विद्यार्थियों को भिन्न का जोड़ सिखाने में मदद हेतु कई गतिविधियों का इस्तेमाल किया था, उन्होंने हमें भिन्नों को घटाने सम्बन्धी अनुभव सुनाए। उनका मानना था कि जब बच्चे भिन्नों का जोड़ इतनी गहराई से सीख चुके हैं, तब घटाव सिखाने के लिए ज्यादा समय लगाने की जरूरत नहीं है। इसलिए उन्होंने बोर्ड पर घटाव के कुछ उदाहरण बताए और फिर विद्यार्थियों को निम्नलिखित सवाल हल करने को दिए।

(i) $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}$

इन सवालों के कुछ बच्चों ने क्रमशः $\frac{1}{0}, \frac{1}{2}$ जवाब दिए।

(i) आपके अनुसार इस प्रकार घटाने के क्या कारण हो सकते हैं?

(ii) ये बच्चे घटाने में किस नियम को लागू कर रहे हैं?

(iii) उन्होंने इस गलत नियम का उपयोग क्यों किया होगा?

(iv) बच्चों को कौन सी गतिविधियों और अभ्यासों से मदद मिल सकती है?

भिन्नात्मक संख्याओं में संक्रियाएं व भाषा :

भिन्न सीखने में एक महत्वपूर्ण बात भाषा का उपयोग है। हम कई बार तुल्य के लिए 'एक–सी' जैसे शब्द का उपयोग करते हैं। बच्चे इन्हें सुनते हैं और इनका अर्थ वह नहीं समझते जो आप कह रहे हैं। ऐसे शब्द एक तरह से 'कक्षा शब्दावली' के अंग तो बन जाते हैं इनका अर्थ सब एक नहीं निकालते। भिन्नों को जोड़ने व गुणा करने संबंधी ऐलगोरिद्म में इस तरह के अपरिभाषित शब्दों की भरमार होती है। बच्चे इन्हें मंत्र की तरह दोहराते रहते हैं। आइए, देखें बच्चे 'उलटने', 'काटने' जैसे शब्दो को लेकर कैसे उलझते रहते हैं। यह हम भिन्नों के जोड़ के संदर्भ में करेंगे।

उदाहरण 3 : एक बार मैंने अपने पड़ोसी की बच्ची शांति को $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ हल करने के लिए कहा। शांति कक्षा पांचवीं में पढ़ती है।

शांति : जोड़ने के लिए हर बराबर होने चाहिए। तो मैं $\frac{3}{4}$ को उलट देती हूं। तो आ गया,

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}=2$$ उत्तर 2 है।

यहां ध्यान दें कि उसे इतना तो पता है कि जोड़ने के लिए हर बराबर होना चाहिए। साथ ही उसे यह भी बताया गया है कि भाग देते वक्त भिन्न को उलट देते हैं। इसलिए उसने हर को बराबर करने के लिए 'उलटने' की विधि का इस्तेमाल कर डाला। आप इसे ठीक कैसे करेंगे?

नियमों में एक और आम शब्द 'काट देना' है। बच्चों के पास जब ऐसे शब्दों की भरमार हो जाती है और स्पष्ट समझ नहीं होती कि किस शब्द का कहाँ और कब उपयोग होना है और इस का अर्थ क्या है तो वह सरलतम प्रतीत होने वाला रास्ता ढूंढ़ने के लिए इनका जहाँ–तहाँ उपयोग करते हैं। जैसेः

यही सवाल जब रीटा को मिला तो उसने $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ को कुछ इस तरह से हल किया :

रीटा : नीचे के अंक दोनो में बराबर होने चाहिए। तो पहले काट देते हैं ...... दो एकम दो, और दो दूनी चार। अब ..... तीन एकम तीन, तो यह $\frac{2}{3}$ हो गया।

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}_{1}\cancel{3}}+\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{2}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

क्या आपने इस बात पर गौर किया कि वह बुदबुदा रही थी कि नीचे के अंक बराबर होने चाहिए। जोड़ के दौरान इन शब्दों का भी खूब इस्तेमाल किया जाता है। अधिकतर बच्चे कारण जाने बगैर हर को बराबर कर देते हैं। एक और दिलचस्प वाकया –

कुछ बच्चों को $\frac{4}{3}+\frac{5}{4}$ का सवाल हल करने के लिए दिया गया। एक बच्चे ने इसे इस प्रकार किया।

$$\frac{4}{3}+\frac{5}{4}=\frac{16}{12}+\frac{15}{12}=\frac{31}{12}$$

शिक्षक : क्या तुम बता सकती हो कि तुमने हर में 12 का उपयोग क्यों किया?

लड़की : नीचे के अंक बराबर करने के लिए।

शिक्षक : और नीचे के अंक बराबर क्यों करने थे?

लड़की : क्योंकि यदि वे तिहाई और चौथाई होंगे तो हम उन्हें जोड़ नहीं सकते। इसलिए हमें ऐसी संख्या ढूंढनी पड़ेगी जिसमें 3 और 4 दोनों का भाग जाए। फिर 12 में तीन का कितनी बार भाग जाएगा? चार बार। तो 4 चौके 16 और दोनों को जोड़ने पर 31 .... और इसलिए उत्तर $\frac{31}{12}$ हुआ।

शिक्षक : बढ़िया। तो $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ लिखने की बजाय तुमने $\frac{16}{12}+\frac{15}{12}$ लिखा। परन्तु कोई कहेगा कि तुम अलग ही सवाल करने लगी।

लड़की : हां।

शिक्षक : तो तुम क्या जवाब दोगी?

लड़की : यदि नीचे के अंक बराबर नहीं है, तो उन्हें बारह बनाना पड़ेगा।

शिक्षक : परन्तु कोई सोचेगा कि यह तो अलग ही सवाल है?

लड़की : हां मैं नहीं जानती पर हमें ऐसे ही सिखाया गया है।

इस उदाहरण से यह पता चलता है कि हमें अपने विद्यार्थियों को यह सोचने के लिए भी प्रेरित करना चाहिए कि वे क्या कर रहे हैं। जो विधि वे अपना रहे हैं वह क्यों उचित है। कोई विधि क्यों अपना रहे हैं। हमें उनसे ऐसे सवाल पूछने होंगे जिससे उन्हें यह सोचने का मौका मिले कि वे क्या कर रहे हैं। एक ऐसा माहौल बनाना होगा जहां विद्यार्थी यह महसूस करें कि वे कोई भी सवाल या भ्रम पर बातचीत कर सकते हैं। उनके कथनों का मज़ाक नहीं होगा और उसे अनदेखा नहीं किया जाएगा और न ही डांटा जाएगा।

E5) एक बच्चे को $3\frac{2}{5}$ में से $1\frac{1}{2}$ घटाने को कहा गया, उसने इसे $1\frac{1}{2}-3\frac{2}{5}$ लिखा। उसने यह गलती क्यों की होगी? आप उसकी मदद कैसे करेंगे?

E6) अपने अनुभव के आधार पर क्या आप सहमत हैं कि छोटी–मोटी गलतियां, पूरे विषय में बच्चे की समझ को अवरूद्ध कर देती हैं। ऐसी गलतियाँ जिन्हें कोई भी समझदार शिक्षक आसानी से दुरूस्त कर सकता है, अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

यदि बच्चों के कार्यों को ध्यान से देखा जाए और उनसे चर्चा की जाए तो बच्चों की छोटी–छोटी गलतफहमियां आसानी से दूर की जा सकती हैं। लेकिन हम ऐसी छोटी–छोटी बातों को अनदेखा करके सूत्र की ओर चले जाते हैं, हम यह नहीं समझ पाते कि अक्सर इनकी वजह से बच्चों में संकल्पनाएं समझने में बाधा आ जाती है और फिर वे उससे जुड़ी अन्य संकल्पनाएं भी नहीं समझ पाते हैं। मुख्य बात यह है कि यदि बच्चों से बात की जाए और इन्हें अपनी समझ को बताने का व उस पर फीडबैक प्राप्त करने का मौका मिले तो उन्हें समस्याओं को हल करने में मदद मिलती है। जरूरी नहीं कि यही उदाहरण सबके साथ कारगर साबित हो। अलग स्थिति व अलग–अलग संदर्भ में आपको शुरुआत वहां से करनी पड़ेगी जो बच्ची जानती है। इसी से शुरू करके संकल्पना स्पष्ट करने की दिशा में बढ़ना होगा।

E7) एक शिक्षक ने कक्षा 6 के बच्चों को भिन्नात्मक संख्याओं के घटाने के प्रश्न दिए तथा उन प्रश्नों के उत्तर निम्नानुसार प्राप्त हुए :

(i) $\frac{2}{4}-\frac{1}{3}=6-4=2$ (ii) $\frac{2}{4}-\frac{1}{3}=\frac{1}{1}$

(iii) $\frac{8-3}{1}=5$

(a) क्या आप बता सकते हैं कि ये उत्तर देने वाले बच्चे अपने उत्तर तक कैसे पहुंचे?

(b) उन्हें क्या आता है?

(c) उनके साथ आगे बढ़ने के लिए क्रमवार क्या करना होगा?

E8) भिन्नात्मक संख्याओं में घटाव की सूत्रविधि क्या है? इसे बच्चों की समझ में लाने के लिए क्या करेंगे? क्रमवार समझाकर लिखें।

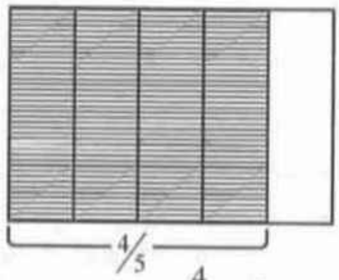
गुणा व भाग की समझ को विकसित करना

बच्चों को प्रायः $\frac{1}{2}$ के $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{3}$ जैसे सवाल हल करने में काफी दिक्कत होती है। एक कारण तो यह हो सकता है कि स्कूलों में उन्हें ऐसे सवाल हल करने के मात्र नियम दिए गए हैं। जिन बच्चों को नियम याद होते हैं, वे तो सही जवाब निकाल लेते हैं जबकि कई बच्चों को यह समझ नहीं आता। यह भी देखा गया है कि जब बच्चों से पूछा जाता है कि $\frac{1}{2}$ के $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{3}$ कितना है? यह $\frac{1}{4}$ कैसे होता है, तो वे कहते हैं 'ऊपर काट के'। इस तरह के सवालों को करते वक्त वे यह तय नहीं कर पाते कि किस संक्रिया का उपयोग करें। अतः वे जब अपने जवाब की व्याख्या करते हैं तो उनकी यही कमजोरी सामने आती है।

बच्चों को यह समझने में मदद करनी चाहिए कि जब संख्या दो–तिहाई की बात करते हैं, तो पहले यह जानना जरूरी है कि 'वह संख्या क्या है। मतलब उन्हें पता होना चाहिए कि वह एक पूर्ण है या उसका हिस्सा है। इसमें आगे बढ़ने में बच्चों की मदद कैसे की जाए। इसका एक तरीका समझें–

उदाहरण 5 : गुणा सिखाने से पहले शिक्षक यह पक्का कर लेना चाहती थी कि क्या बच्चे 'हिस्से' का संबंध 'पूर्ण' से जोड़ पाते हैं? इसके लिए उसने बच्चों को विभिन्न अभ्यास दिए व इस तरह आगे बढ़ी:

शिक्षक : $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ कितना होता है यह पता लगाना है? अर्थात एक पूरे के $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$। तो सबसे पहले 1 का $\frac{4}{5}$ पता करें। इसे हम एक कागज को रंगकर दिखाएंगे। शिक्षक ने एक बड़ा कागज लेकर बच्चों के सामने लगा दिया। उसने कागज पर एक आयत बनाया। यह आयत एक पूरा दर्शाता है। उसने शालिनी को बुलाकर 1 के $\frac{4}{5}$ भाग को रंगने को कहा।



चित्र 9 : 1 का $\frac{4}{5}$ दिखाना

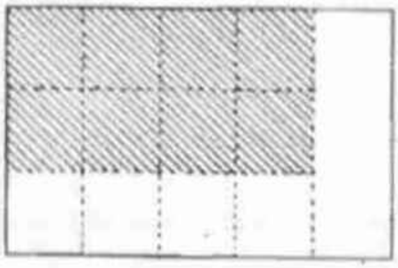
शालिनी : 1 का $\frac{4}{5}$ पता करने के लिए पहले हम पूर्ण को पांच भागों में बांट देंगे और फिर चार भागों को रंग देंगे। (चित्र 9)

शिक्षक : शाबाश। अब बताओ इस हिस्से याने $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ क्या होगा, कैसे पता करेंगे? यह याद रखना कि हमें $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ पता करना है, 1 का नहीं।

रवि : हमें इसे तीन भागों में बांटना होगा और उनमें से दो भाग लेने होंगे। (वह रंगे हुए भाग को खड़ी रेखाओं से तीन भागों में बांटने की कोशिश करता है।)

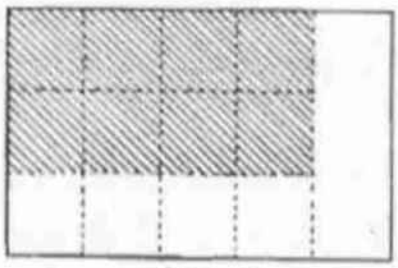
शिक्षक : शायद यह आड़ी रेखाओं से करना ज्यादा आसान होगा।

रवि : हां, हां। आड़ी रेखाओं से बांटना ज्यादा आसान है। (चित्र 10) और यह दोनों तरह की रेखाओं से रंगा हुआ हिस्सा $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ है।



चित्र 10 : 1 के $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ दिखाना

अब यह कैसे पता करें कि यह पूर्ण का (यानी पूरे आयत का) कितना अंश (हिस्सा) है? यह आसानी से पता करने के लिए हम पूर्ण का बंटवारा पूरा कर देंगे (चित्र 11)। अब पूर्ण को कुल 15 भागों में बांटा गया है। और दोनों रेखाओं से रंगे हुए भाग में 8 खाने हैं। यानी कि रंगा हुआ भाग पूरे का $\frac{8}{15}$ है। यानी $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ हुआ $\frac{8}{15}$ के बराबर है।



चित्र 11

समूह में सवाल करनाः

शिक्षक ने बच्चों को A,B,C,D, E पांच टोलियाँ बनाने को कहा। उसने हर एक टोली को अलग–अलग सवाल दिया। शिक्षक ने प्रत्येक टोली के साथ काफी समय बिताकर यह देखा कि क्या बच्चे रंगकर किसी हिस्से

का हिस्सा पता करना सीख/समझ गए हैं। इन जवाबों के पैटर्न के आधार पर नियम विकसित करने के लिए शिक्षिका ने हर एक टोली को दिया गया सवाल तथा उसके द्वारा दिया गया जवाब ब्लैक बोर्ड पर लिख दिया।

A. $\frac{2}{3}$ का $\frac{5}{7}$, $\frac{10}{21}$ होता है।

B. $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{20}$ होता है।

C. $\frac{2}{3}$ का $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{24}$ होता है।

D. $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{12}$ होता है।

E. $\frac{3}{5}$ का $\frac{4}{7}$, $\frac{12}{35}$ होता है।

शिक्षक : सवालों और उनके जवाबों को देखो। पहले सवाल के हर में 3 और 7 है तथा जवाब में 21, क्या कोई संबंध दिखता है?

एक छात्र: जी मैडम, 3 X 7 बराबर 21 होता है।

शिक्षक : इसी प्रकार से क्या B, C, D और E में भी कोई संबंध दिखता है?

बच्चा : जी मैडम 4 X 5 = 20, 3 X 8 = 24, 4 X 3 = 12 और 5 X 7 = 35 होता है।

शिक्षक : क्या सब इससे सहमत हैं?

बच्चे : जी मैडम।

एक अन्य छात्र : पहले सवाल में अंश 10, 5 X 2 की वजह से आया है?

शिक्षक : बहुत बढ़िया। क्या अब तुम रंग भरे बगैर बता सकते हो कि $\frac{5}{6}$ का $\frac{3}{4}$ क्या होगा?

वही छात्र : $\frac{5\times3}{6\times4}=\frac{15}{24}$ होगा।

शिक्षक : शाबाश। तो तुमने किसी हिस्से का हिस्सा निकालने यानी भिन्नों के गुणा का नियम पता कर लिया है। तुम अंशों का गुणा करके गुणनफल को अंश और हर को गुणा करके गुणनफल का हर निकाल सकते हो। जब एक बार बच्चों को यह बात समझ में आ गई तो शिक्षकों ने फिर जानबूझकर भिन्नों का जोड़ दोहराया ताकि बच्चे समझ सकें कि $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\neq\frac{2}{5}$ और $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\neq\frac{2+3}{3+5}$।

यह सब स्पष्ट करना बहुत जरूरी है और यह सब अपने आप समझ नहीं आता।

गुणा का नियम सरल है किन्तु इसे समझना जोड़ के नियम समझने से अलग है। इस बात पर ध्यान दें कि गुणा का नियम बनाने अथवा सामान्य पैटर्न को पहचानने से पहले जरूरी है कि $\frac{c}{d}$ का $\frac{a}{b}$ पता करने के बहुत से प्रश्न करें व उन्हें कागज पर आयत आदि रंग कर भी जांचें। इससे उनमें आत्मविश्वास आएगा और वे यह समझ पाएंगे कि यह नियम क्यों सही है।

E9) बच्चों से $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ कितना है पर कैसे चर्चा करेंगे?

संक्रिया करने में गलतियाँ :

अब हम देखें कि भिन्नों का गुणा करते वक्त बच्चों को सामान्य गुणनखंड काटने में किस तरह की दिक्कतें हो सकती हैं।

$\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{4}\times\frac{7}{6}$ को हल करते हुए कुछ बच्चों ने इसका जवाब 7 लिखा।

ध्यान दें कि बच्चों ने हर में दोनों 6 काट दिए हैं। इसके कई कारण हो सकते हैं। उनमें से प्रत्येक से बात करके ही पता चलेगा कि इसके लिए उसने क्या तर्क इस्तेमाल किया है। आप भी संभव तर्क सोचें।

एक समस्या यह भी होती है कि समान गुणनखण्ड काटने के बाद बच्चे 1 की बजाय 0 लिख देते हैं। वे ऐसा क्यों कर रहे होंगे यह भी सोचें? उनके तर्कों की अभिव्यक्ति व उन पर संवाद जरूरी है। उन्हें यह भी समझ आना चाहिए कि अंश के एक 5 से हर का एक ही पांच और एक 6 से एक ही 6 कटेगा।

उदाहरण 6 : शिक्षक बच्चे से यह बातचीत करती है।

शिक्षक : $\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}$ कितना है?

छात्र : $\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{3\times5}{5\times8}=\frac{15}{40}$

शिक्षक : क्या तुम इसे सरल रूप में दिखा सकते हो?

छात्र : $\frac{3}{8}$ होगा।

शिक्षक : ठीक। अब एक और सवाल पूछती हूं। क्या 3 x 5 और 5 x 3 बराबर हैं?

छात्र : जी।

शिक्षक : तो $\frac{3\times5}{5\times8}$ को एक और तरीके से कैसे लिख सकते हैं?

एक छात्र : $\frac{3\times5}{8\times5}$

एक अन्य छात्र : $\frac{5\times3}{5\times8}$

एक अन्य छात्र : $\frac{5\times3}{8\times5}$

शिक्षक : ठीक है। चलो $\frac{5\times3}{5\times8}$ को ही लेते हैं। क्या तुम इसे दो भिन्नों के गुणा के रूप में लिख सकते हो?

छात्र : जी, लिख सकते हैं। $\frac{5\times3}{5\times8}=\frac{5}{5}\times\frac{3}{8}$

शिक्षक : और $\frac{5}{5}$ है?

छात्र : तो 1 ही है।

शिक्षक : इस गुणा को यों भी लिख सकते हैं – $\frac{5\times3}{8\times5}=1\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$

इसे करने का एक और तरीका यह है कि अंश और हर दोनों को 5 से भाग दे दें। अब यदि हम अंश को 5 से भाग दें तो हमें 1 x 3 मिलेगा और हर को पांच से भाग देने पर 1 x 8 मिलेगा। यानी $\frac{5\times3}{5\times8}=\frac{3\times1}{1\times8}=\frac{3}{8}$ यही हम करते हैं जब हम अंश और हर में बराबर गुणनखण्ड काट देते हैं।

इसी तरह बातचीत के जरिए हम कुछ उदाहरणों पर चर्चा कर सकते हैं, जैसे– $\frac{4\times7}{5\times6}$ या अन्य ऐसे सवालों में में 'कट–पिट' (cancellation) कैसे होगा?

इस उदाहरण से जाहिर है कि गुणा की प्रक्रिया को समझना जरूरी है। सिर्फ प्रक्रिया बताने से काम नहीं चलेगा। लेकिन अधिकांश शिक्षक कक्षा में एक–दो सवाल बता कर ढेर सारे उसी तरह के अभ्यास गृहकार्य के रूप में दे देते हैं। इससे बच्चे वास्तव में प्रक्रिया को समझ नहीं पाते। इसलिए अभ्यास देने से पहले यह सुनिश्चित करना जरूरी है कि बच्चे अवधारणा समझ गए हैं।

मिश्रित भिन्नों के गुणा :

मिश्रित भिन्नों, जैसे $2\frac{1}{2}$ और $3\frac{2}{3}$ का गुणा कैसे करें। अक्सर $2\frac{1}{2}\times3\frac{2}{3}=2$ लिख देते हैं। यह समस्या जोड़ में भी आती है।

इसका एक प्रमुख सम्भव कारण यह है कि $2\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{2}$ और $3\frac{2}{3}=3\times\frac{2}{3}$ मान लेते हैं। ऐसा न हो, यह सुनिश्चित करने के लिए हमें बच्चों को यह यकीन दिलाना होगा कि $2\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}$ होता है। इसके लिए उन्हें यह समझना होगा कि दो भिन्नों का गुणा करने से पहले उन्हें विषम भिन्नों में बदलना जरूरी होता है। इसके बाद ही गुणा किया जा सकता है।

E10) मान लीजिए कोई बच्चा कहता है कि $2\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{2}$; आप उसे कैसे यकीन दिलाएंगे कि उसकी धारणा गलत है और $2\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}$ होता है?

अब भाग से जुड़ी समस्याओं पर गौर करें।

भिन्नात्मक संख्याओं में भाग को समझना आवश्यक है। भाग करने की प्रक्रिया में गुणा ही करना पड़ता है किन्तु एक भिन्नात्मक संख्या को लेकर भाग को प्राकृत संख्याओं के संदर्भ में समझने में भी थोड़ी मुश्किल होती है। इसका अर्थ भिन्नात्मक संख्याओं में समझना मददगार है और इस तरह के सवाल हल करने के एल्गोरिद्म अथवा प्रक्रिया भी है।

उदाहरण 7 : मैं अपने पड़ोस की दस वर्षीय बच्ची अजिता और उसकी सहेली के साथ भिन्नों की क्रियाओं के बारे में बातचीत कर रही थी। बातचीत के दौरान मैंने उनसे पूछा कि $\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}$ कितना होगा? अजिता ने तुरन्त कहा कि उसे इसका जवाब निकालना आता है : $\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

यह सुनकर उसकी सहेली रेणु ने कहा कि उत्तर $\frac{3}{4}$ नहीं बल्कि $\frac{4}{3}$ होगा। मैंने उनसे पूछा कि उन्होंने उत्तर कैसे निकाला।

अजिता : $\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}=3\times\frac{1}{4}$

रेणु : यह गलत है। हमें दूसरी संख्या को उलटकर गुणा करना पड़ेगा।

अजिता : ओह हां! मैंने गलती कर दी। यह $\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$ होगा। मैंने पूछा पहली संख्या को क्यों नहीं उलटते, तो वह सोच में पड़ गई। आखिर अजिता बोली ऐसे ही सिखाया है। भाजक को उलटते हैं यही नियम है। उनकी बातों से मुझे समझ में आ गया कि उन्हें भाग की प्रक्रिया की बुनियादी बातें समझ में नहीं आई हैं। लिहाजा मैंने उन्हें समझाना शुरू किया।

मैं : मान लो कि तुम्हारे पास 12 टॉफियां हैं। और तुम इन्हें 4 दोस्तों में बराबर–बराबर बांटना चाहती हो। प्रत्येक को कितनी टॉफियां मिलेंगी?

लड़कियां : तीन–तीन।

मैं : तो क्या मैं इसी बात को लिख सकती हूं कि $12 \div 4 = 3$

लड़कियां : हां।

मैं : यानी $12 \div 4$ से हमें पता चलता है कि 12 में से चार–चार के कितने समूह हमें प्राप्त होंगे। अब मैं 4 गिलास ले आई। 4 में से 2 गिलास खाली थे और 2 में शरबत भरा था। शरबत को मैंने एक बर्तन में डाल दिया।

मैं : अब इस शरबत को 4 लोगों में बराबर–बराबर बांटो –(मैं, तुम दोनों और आया के लिए) उन्होंने चार गिलासों में बराबर–बराबर शरबत डाला। हर गिलास $\frac{1}{2}$ भर गया।

मैं : 2 गिलास शरबत में से कितने आधे गिलास शरबत बने?

लड़कियां : 4

मैं : इसका मतलब हुआ कि $2 \div \frac{1}{2} = 4$ क्या तुम इससे सहमत हो?

लड़कियां : हां।

इसके बाद मैं एक रिबन ले आई उसमें से 2 मीटर नाप लिया। इसके बाद मैंने आधा मीटर नापकर काट लिया। मैंने उनसे पूछा कि 2 मीटर के टुकड़े में से $\frac{1}{2}$ मीटर के कितने टुकड़े निकल सकते हैं।

लड़कियां : 4 टुकड़े (उन्होंने यह भी बताया कि यह उत्तर कैसे आया)।

मैं : ठीक। तो हमें $2 \div \frac{1}{2} = 4$ मिला। अब देखो कि $2 \div \frac{1}{2} = 4$ और 2 x 2 = 4?

लड़कियां : हां।

मैं : अब देखें कि $6 \div \frac{1}{3}$ कितना होता है?

मैंने रिबन के द्वारा उन्हें बताया कि $6 \div \frac{1}{3} = 18$ होता है। साथ ही मैंने इस बात पर भी उनका ध्यान दिलाया कि $6 \div \frac{1}{3} = 18$ और $6 \times 3 = 18$

मैं : क्या अब तुम बगैर रिबन के बता सकती हो कि $9 \div \frac{1}{3}$ क्या होगा?

लड़कियां : 27 होगा मैडम।

मैं : कैसे निकाला?

लड़कियां : $9 \times 3 = 27$

मैं : बहुत अच्छे।

मैंने उन्हें यह नियम अच्छी तरह समझा दिया कि 'किसी भिन्न में दूसरी भिन्न का भाग देने का मतलब यह है कि दूसरी भिन्न के उलटे से गुणा कर दिया जाए।' इसके बाद मैंने अभ्यास के लिए उनसे कई सवाल करवाए, जैसे, $12 \div \frac{4}{3} = 12 \times \frac{3}{4} = 9$

$\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$

बाद में मैंने रिबन की मदद से भी $\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} - \frac{4}{3}$ जैसे सवाल समझाए। इससे उन्हें नियम को तार्किक रूप से समझने में मदद मिली।

E11) कागज मोड़ने की गतिविधि के द्वारा आप बच्चों को कैसे समझाएंगे कि $1 \div \frac{1}{2} = 2$ और $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$

इस पाठ के अध्ययन से आप यह समझ गए होंगे कि भिन्नों की गणितीय संक्रियाओं के दौरान बच्चे कई समस्याओं का सामना करते हैं। तथा नियम सीखने से पहले जरूरी है कि बच्चे अवधारणा समझ जाएं। इससे आपको मदद मिलेगी कि आप बच्चों को भिन्न की संक्रियाएं समझने में मदद कर पाएंगे।

सारांश

1. हमने बच्चों द्वारा भिन्न संख्याओं की चार बुनियादी क्रियाओं के दौरान की जाने वाली आम गलतियों को देखा।
2. इन संक्रियाओं के दौरान आने वाली कुछ समस्याओं से निपटने में बच्चों को मदद देने के कुछ तरीके सुझाए।

पाठ – 5
भिन्नों में सूत्र विधि पर चर्चा

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- सूत्र विधियों पर एक बारीक नज़र
  - जोड़ व घटा की सूत्रविधि
  - गुणा व भाग की सूत्रविधि
  - भिन्नात्मक संख्याओं में भाग
- भिन्नात्मक संख्या व अनुमान
- सारांश

परिचय :

सूत्रविधि किसी सवाल को हल करने का चरण–दर–चरण तरीका होता है। इस पाठ में हम क्या सूत्रविधि को सीखना और अवधारणा को सीखना एक ही बात है या क्या एक क्रिया से संबंधित एक ही सूत्रविधि होती है या एक क्रिया के लिए एक से अधिक सूत्रविधियां हो सकती हैं?" आदि सवालों पर चर्चा करेंगे। एक सूत्रविधि लिख लेना और उसे दी गई संख्याओं पर लागू कर देना ही यह समझने के लिए पर्याप्त नहीं है कि विभिन्न सवाल कैसे हल किए जाएंगे। अतः इस पाठ में सवाल को हल करने में सूत्रविधियों का उपयोग करने की प्रक्रिया के बजाय हम यह समझेंगे कि किसी सूत्रविधि के प्रत्येक चरण पर क्या सिद्धांत निहित हैं।

इससे यह समझना आसान होगा कि क्यों भिन्नों से संबंधित सूत्रविधियां कठिन मानी जाती हैं। बच्चे बगैर समझे सूत्र विधि का प्रयोग मशीनी ढंग से करते हैं। इस पाठ में हम विशेष तौर पर भिन्नों की विभिन्न सूत्रविधियों से जुड़े मुद्दों और विभिन्न उपयोग की अवधारणात्मक व्याख्या एवं उपयुक्त शिक्षण विधि जिससे बच्चे सूत्रविधियों के उपयोग की दिक्कतों से न जूझें पर हम बातचीत करेंगे।

उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- किसी सूत्रविधि के मशीनी ढंग से उपयोग और उसे अवधारणात्मक रूप से समझने के बीच अंतर बता पाएंगे।
- यह पहचान पाएंगे कि भिन्नों की विभिन्न क्रियाओं में सूत्रविधि को समझ पाने में बच्चों को क्या दिक्कतें आती हैं और कुछ आम दिक्कतों से परिचित भी हो पाएंगे।
- छोटे बच्चों को विभिन्न क्रियाओं की सूत्रविधियां सिखाने के कारगर तरीके सुझा पाएंगे।
- भिन्नों के साथ क्रियाओं के परिणाम का अन्दाजा लगाने की क्षमता विकसित करने में बच्चों को मदद दे पाएंगे।

सूत्रविधियों पर एक बारीक नज़र

सूत्रविधि (ऐल्गोरिद्म) – किसी सवाल को हल करने की सूत्रविधि का मतलब उस सवाल का उत्तर प्राप्त करने की पूरी चरण-दर-चरण प्रक्रिया है। जैसे– किसी 3 अंकों की संख्या को 2 अंकों की संख्या से गुणा करने की चरण–दर–चरण प्रक्रिया एक सूत्रविधि है। इसी प्रकार से भिन्नों और दशमलव भिन्नों की संक्रियाओं से जुड़े सवाल हल करने के लिए भी अलग–अलग सूत्रविधियां होती हैं।

E1) भिन्नों से संबंधित पांच सूत्रविधियां लिखिए।

E2) क्या सूत्रविधियां केवल चार बुनियादी क्रियाओं के लिए ही हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

? प्राथमिक स्कूल में किसी सूत्रविधि को कैसे प्रस्तुत किया जाता है और किस ढंग से उसके साथ काम किया जाता है?

? क्या पाठ्यपुस्तक और कक्षा की प्रक्रिया बच्चे को यह मौका देती है कि वह अवधारणा की छानबीन कर सके और सवाल हल करने के विभिन्न चरणों की तलाश कर सके?

? क्या यह सही है कि पाठ्यपुस्तक में एक विशिष्ट प्रक्रिया दी जाती है, जिसका उपयोग करके उत्तर तक पहुंचना है?

जब बच्चों को जोड़ सिखाना होता है, तो अधिकांश पाठ्यपुस्तकों और कक्षाओं में उनसे कहा जाता है कि वे अंक–दर–अंक जोड़ें। नतीजा यह होता है कि उन्हें संबंधित संख्याओं की कोई धारणा नहीं होती और वे आमतौर पर प्रक्रिया की जानकारी की बारीकियों में उलझ जाते हैं अर्थात् विभिन्न अंकों वाली संख्याओं को जोड़ने की प्रक्रिया में फंसे रहते हैं। किसी सूत्रविधि में दी गई प्रक्रिया को जानने का मतलब यह नहीं है कि बच्ची ने वह प्रक्रिया समझ ली है या यह समझ लिया है कि वह सूत्रविधि क्यों कारगर है। इसके विपरीत, यदि बच्ची की अवधारणात्मक समझ अच्छी है तो इससे उसे विभिन्न परिस्थितियों में सूत्रविधि को उपयोग करने में मदद मिलेगी और शायद वह सूत्रविधि भी विकसित कर पाए।

सूत्रविधि को समझने के लिए पहले हमें संबंधित वस्तुओं को समझना होगा। फिर बच्ची के मन में संख्याओं की एक धारणा होनी चाहिए और यह समझ होनी चाहिए कि उस क्रिया का अर्थ क्या है और उत्तर लगभग कितना आएगा। इसके बाद सूत्रविधि के प्रत्येक चरण को समझना व इन चरणों की क्या आवश्यकता है। और अन्ततः सही उत्तर प्राप्त करना है।

आइए,जोड़ का उदाहरण लें – यदि मैं आपसे पूछूं कि 34 और 57 को जोड़ने के कितने तरीके हैं, तो आप क्या कहेंगे? क्या इसका एक ही तरीका है? मैंने कक्षा–4 के बच्चों के एक समूह से बातचीत के दौरान उनसे जल्दी से यह बताने को कहा कि 17 गुणा 3 कितना होगा। जल्दी से समवेत स्वर में जवाब आया 51। जब उनसे पूछा गया कि उन्होंने कैसे पता किया, तो जवाब इस प्रकार थे :

एक बच्ची : सरल है। मैंने 30 और 21 को जोड़ दिया।

एक अन्य बच्ची : मुझे जवाब पता था क्योंकि हमने 20 तक पहाड़े याद किए हैं।

अब बच्चों से पूछा गया कि 47 + 48 कितना होगा।

एक बच्ची (जल्दी से) : 95, पहले 40 + 40 कर लो और फिर 7 + 8।

एक और बच्ची : मैं पहले 45 + 45 करके फिर 5 जोडूंगी।

हम देखते हैं कि अलग–अलग बच्चे, अलग–अलग ढंग से सवाल हल करते हैं, जो भी उन्हें ज़्यादा सुविधाजनक लगे। मैं पक्का कह सकती हूं कि यदि आपसे 49 + 49 करने को कहा जाता तो आपका तरीका और भी अलग हो सकता है।

किन्तु यदि हम इन उदाहरणों को ज्यादा बारीकी से देखें तो पाएंगे कि ये संख्याओं के बारे में एक समृद्ध खजाने का संकेत देते हैं। इससे 10 और 5 के गुणज के उपयोग का पता चलता है, यह पता चलता है कि 7 + 8 वास्तव में 15 के विभाजन का एक तरीका है। शायद बच्चों में यह भी क्षमता होती है कि वे अलग–अलग सवालों के लिए अलग–अलग तरीका अपना सकते हैं। यह लचीलापन अवधारणात्मक ज्ञान का एक महत्वपूर्ण अंग है। निम्नलिखित सवाल पर गौर कीजिए :

$$\frac{548+548+548+548}{4}$$

इसका उत्तर निकालने के लिए वास्तव में किसी गणना की जरूरत नहीं है। यदि व्यक्ति को अवधारणात्मक ज्ञान है तो इसका उत्तर ज़ाहिर है। यदि कोई व्यक्ति मशीनी ढंग से सूत्रविधि और प्रक्रिया (पहले उसे सारे 548 को जोड़े फिर लम्बा भाग) लेकिन यह हो सकता है कि 548 का बार–बार दोहराया जाना हमारे इस ज्ञान को कुरेद सकता है कि गुणा वास्तव में बार–बार किया जाने वाला जोड़ ही है। हम यह भी देखते हैं कि गुणक 4 है (क्योंकि 548 पूरे 4 बार आया है) और यह भाजक के बराबर है। ये तथ्य हमें इस बात की याद दिला देते हैं कि भाग दरअसल गुणा का विलोम है। एक पुख्ता अवधारणात्मक ज्ञान होने पर अनायास ही, उपयुक्त परिस्थिति सामने आने पर सारे संबंधित तथ्य उपयोग के लिए ध्यान में आ जाते हैं। हो सकता है कि दिमाग में और भी कई कड़ियां होती हैं जो सब यही बताती हैं कि वास्तव में ये सारे गुणा–भाग करने की कोई ज़रूरत नहीं है।

E3) ऐसे 2 और उदाहरण लिखिए जिनमें अवधारणात्मक समझ होने पर उत्तर आसान हो जबकि यदि सिर्फ प्रक्रियागत ज्ञान का उपयोग किया जाए तो हल लम्बा हो।

E4) किसी बच्ची को सूत्रविधि इस ढंग से पढ़ाने के पांच नुकसान गिनाइए जिसमें वह उस सूत्रविधि को केवल मशीनी ढंग से उपयोग करना सीख पाए।

हमने देखा कि यदि बच्ची संबंधित गणितीय तर्क को समझती है तो कई सवालों को हल करने में उसकी सहजता व कार्यक्षमता बढ़ती है।

यदि यह सही है तो फिर सूत्रविधि क्यों चाहिए? क्या सूत्रविधि सिखाने का कोई कारण नहीं है? और वह क्या बात है जो इन सूत्रविधियों का इतना सशक्त बनाती है और क्यों सूत्रविधियां उपयोगी हैं?

इन मुद्दों को समझने के लिए हमें गणितीय संक्रियाएं कैसे करते हैं को देखना होगा। जब हमें दो संख्याओं को जोड़ना हो, तो कई बार हम किसी विधि का इस्तेमाल किए बगैर मन ही मन उन्हें जोड़ लेते हैं। किन्तु यदि दो बड़ी–बड़ी संख्याओं को जोड़ना हो या कई संख्याओं को जोड़ना हो, तो हम मन में नहीं जोड़ सकते। हम हमेशा यह तो नहीं कर सकते कि हर बार इस्तेमाल करने के लिए कोई तरीका खोजते रहें या जोड़ी गई संख्याओं को याद रखने की कोई रणनीति जुगाड़ते रहें। इसलिए हमें एक विश्वसनीय व सामान्य सूत्रविधि की जरूरत होती है– एक ऐसी विधि जो हर स्थिति में काम करे। जोड़ की जो स्तम्भ विधि हम स्कूल में सीखते हैं वह इस तरह बनाई गई है कि आम तौर पर सामने आने वाली पूर्ण संख्याओं के कोई भी जोड़ हम उसकी मदद से कर सकते हैं। इसी प्रकार से बाकी, गुणा और भाग की सूत्रविधियां भी सामान्य विधियां हैं और ये पूर्णांक संख्याओं की इन क्रियाओं के लगभग सभी मामलों पर लागू होती हैं। ये विधियां बहुत सामान्य प्रकृति की हैं और इन्हें आसानी से दशमलव संख्याओं पर भी लागू किया जा सकता है।

यदि ये विधियां इतनी सामान्य न होतीं तो हमारे लिए बहुत मुश्किल हो जाता और यह समझने में कठिनाई होती कि ये क्यों काम करती हैं। इनकी सामान्य प्रकृति ही इन विधियों को इतना सशक्त बनाती है।

यह आम तौर पर माना जाता है कि अभ्यास करने से सूत्रविधियों पर महारत हासिल होती है। किन्तु क्या यही एकमात्र जरूरी तत्व है? किसी बच्ची को एक सूत्रविधि पर आधारित कई एक जैसे सवाल मशीनी ढंग से हल करने को कहना, बच्ची को उस सूत्रविधि में दक्ष बनाने की अच्छी रणनीति नहीं है। (इन क्षमताओं को विकसित करने का सबसे महत्वपूर्ण पहलू यह है कि बच्चों को सूत्रविधि के हर चरण को समझने के पर्याप्त मौके दिए जाते हैं।) बच्चों के सामने सूत्रविधि के आम प्रस्तुतीकरण में विभिन्न मध्यवर्ती चरणों पर कोई चर्चा नहीं की जाती और न ही प्रस्तुति को अलग–अलग अवस्थाओं में विभाजित करके सूत्रविधि के उपयोग के प्रमुख चरण स्पष्ट किए जाते हैं कि बच्चे इन विभिन्न चरणों का तर्क समझ सकें । हममें से अधिकांश लोग इसकी परवाह नहीं करते क्योंकि इन्हें महत्वपूर्ण समझा ही नहीं जाता। हम तो यह मानते हैं कि बच्चों पर इस सबका बोझ नहीं डालना चाहिए वरना वे भ्रमित होकर ग़लतियां करेंगे।

? क्या बच्चे हर चरण में निहित तर्क को समझने की क्षमता रखते हैं? क्या इससे उन्हें मदद मिलेगी? क्या इससे भ्रम और ग़लतियों में वृद्धि होगी?

यह संबंधित सूत्रविधि की प्रकृति पर भी निर्भर होगा किन्तु इतना तो हम सब जानते हैं कि जब सूत्रविधियां बच्ची के दिमाग में इकट्ठी होती रहती हैं, तो वे एक–दूसरे में हस्तक्षेप करती हैं। तब बच्ची चरण भूलने लगती है और बड़ी–बड़ी भूलें कर बैठती है। तो हम क्या कर सकते हैं? मेरे एक मित्र का तर्क है, "मेरे ख्याल से यह ज़रूरी है कि बच्चे सूत्रविधि के हर चरण को समझें। हो सकता है कि वे इसे फौरन न समझ पाएं परन्तु हमें उपयुक्त रणनीति बनानी चाहिए ताकि बच्चों को विभिन्न चरणों का उपयुक्त एहसास मिल पाए। इन विचारों को सम्प्रेषित करने के लिए, हो सकता है कि हमें तरह–तरह की ऐसी वस्तुओं का उपयोग करना पड़े जिन्हें हाथों से हिला सकते हैं, मोड़ सकते हैं। कभी–कभी इन चरणों के लिए किसी अवधारणा की समझ की ज़रूरत होगी, जो पहले ही सीखी जानी चाहिए। ऐसे मामलों में हमें यह जांच कर लेना होगा कि बच्ची के पास ज़रूरी ज्ञान है या नहीं। मसलन, आपने देखा ही है कि गुणा कि सूत्रविधि सीखने के लिए स्थानीय मान की समझ ज़रूरी है, यह समझना ज़रूरी है कि गुणा बार–बार किया जाने वाला जोड़ है।" आदि।

E5) क्या आप मेरे मित्र के तर्कों से सहमत हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए और एक उदाहरण से समझाइए।

अब कुछ ऐसी सूत्रविधियां देखें जिनका प्रयोग आमतौर पर नहीं किया जाता।

अन्य सूत्रविधियां

सूत्रविधि 1 : रूसी किसानों का गुणा

नीचे की तालिका में हमने दर्शाया है कि इस विधि की मदद से 437 में 37 का गुणा कैसे करते हैं–

1	437	←				
2	874					
4	1748	←		1		437
8	3496		+	4	+	1748
16	6992		+	32	+	13984
32	13984	←		37		16169

यहां दर्शाई सूत्रविधि में पहाड़ों का ज्ञान बिल्कुल जरूरी नहीं है। आपको सिर्फ इतना पता होना चाहिए कि संख्या को दुगना कैसे करें। जिन संख्याओं को गुणा करना है उनमें से बड़ी संख्या (यहां 437) से शुरू कीजिए। इसको दुगना करने पर 874 आएगा। अब 874 को दुगना करने पर 1748 आएगा। बॉक्स में दर्शाई तालिका जैसी बना लीजिए। ध्यान दें कि यह दरअसल 437 की कुछ संख्याएं दिखा रहे हैं: $437\times1, 437\times2, 437\times4$ आदि। हम यह तालिका तब तक आगे बढ़ाते हैं जब तक कि बाएं स्तम्भ की कुछ संख्याओं का योग 37 न हो जाए। 37 से ही तो हमें गुणा करना है। इस सवाल में हम 32 पर रूक गए क्योंकि हमें 32 + 4 + 1 को जोड़कर 37 मिल जाएगा। अब हमें सिर्फ इतना करना है कि दाएं स्तम्भ की उन संख्याओं को जोड़ लें जिनके सामने तीर के निशान है। इस सूत्रविधि को निम्नानुसार प्रस्तुत किया जा सकता है :

$$437\times37 = 437\times(32+4+1) = 437\times32+437\times4+437\times1$$

$$= 13984+1748+437 = 16169$$

नोट : गुणा की इस विधि का उपयोग प्राचीन रूसी किसान किया करते थे। आज भी एशिया और यूरोप के कुछ इलाकों में आम लोग इसका उपयोग करते हैं।

क्या हम इस सूत्रविधि का उपयोग किन्ही भी दो पूर्णांक संख्याओं के गुणा के लिए कर सकते हैं?

E6) बॉक्स के पहले स्तम्भ की सभी संख्याएं 2 के घात में हैं। यदि हम किसी भी संख्या को 2 के घात वाली संख्याओं के योग के रूप में दर्शा सकें तो उपरोक्त सूत्रविधि सामान्य है और इसे किन्हीं भी दो पूर्णांक संख्याओं के गुणा के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है। आप दी गई किसी संख्या को 2 की घात के जोड़ के रूप में कैसे दर्शाएंगे?

E7) इस सूत्रविधि से परिचित कराए जाने से पहले किसी बच्ची को क्या–क्या पता होना चाहिए? यह विधि मानक विधि से सरल है या कठिन ?

सूत्रविधि के उपयोग में गलतियां

गणित पढ़ाते हुए हम देखते हैं कि बच्चे सूत्रविधियों का उपयोग करते हुए प्रायः गलती कर बैठते हैं। सूत्रविधियों के इस्तेमाल में की गई गलतियों के अध्ययन से पता चलता है कि कई गलतियों में एक पैटर्न होता है। ये गलतियां प्रायः एक ही तरीके की होती हैं और इनका पूर्वानुमान किया जा सकता है। हो सकता है कि इनमें से कुछ गलतियां ज्यादा बच्चे करें, जबकि कुछ गलतियां थोड़े से बच्चे करें किन्तु यह जानना उपयोगी हैं कि इन गलतियों में एक पैटर्न है और यदि कोई बच्ची एक गलती करेगी तो अंदाज लगाया जा सकता है कि वह और कौन–कौन सी गलतियां करेगी। यह जानने से हम शिक्षक के नाते बच्चों में सीखने की प्रकिया के प्रति अधिक संवेदनशील हो पाएंगे और उनकी सीखने की क्षमता के प्रति अधिक आश्वस्त भी हो पाएंगे। गलतियों में निहित पैटर्न की समझ के अलावा इससे हमें यह भी पता चलता है कि बच्ची क्या–क्या सही कर लेती है और हम उसके द्वारा सूत्रविधि के उपयोग में की जाने वाली प्रक्रियागत गलतियां भी पहचान पाते हैं। यदि शिक्षक यह समझ पाए कि बाकी सब ठीक है और मात्र प्रकिया में कहीं कोई गलती है तो बच्ची से बातचीत की जा सकती है। यहां यह कहना लाज़िमी है कि शुरूआती दौर में बच्ची द्वारा विधि के उपयोग में की जा रही ग़लती को सुधारना संभव है। किन्तु यदि यही छोटी सी गलती न पहचानी जाए तो यह मन में बैठ जाती है। इसके बाद जब बच्ची ज़्यादा पेचीदा विधियों का उपयोग करती है तो पूरी तरह उलझकर रह जाती है।

गणित शिक्षण में प्रक्रियागत और अवधारणात्मक, दोनों तरह की समझ पर ध्यान देना जरूरी है। किसी गणितीय संक्रिया की सुपरिभाषित सूत्रविधि से परिचित कराने से पूर्व यह जरूरी है कि छात्रों को ठोस प्रतीकों के माध्यम से संबंधित गणितीय संकिया से परिचित कराया जाए ताकि उनके दिमाग में अवधारणा विकसित हो पाए। यह भी मददगार होता है कि जब बच्चे प्रतीकात्मक सूत्रविधि में थोड़ी दक्षता हासिल कर चुके तो उनके

सामने एक बार फिर वह क्रिया ठोस रूप में प्रस्तुत की जाए। कक्षा में छात्रों को किसी गणितीय क्रिया से परिचित कराने के कई तरीके हैं ये तरीके काफी सामान्य हैं– ये सिर्फ भिन्नों पर ही नहीं वरन् स्कूल गणित के कई विषयों पर लागू होते हैं। क्रियाएं सीखने की विभिन्न अवस्थाओं में इन विभिन्न प्रतीकों का मिला–जुला उपयोग मददगार होता है।

भिन्नों की संक्रियाएं समझने में मदद करने वाले कुछ तरीके।

भिन्न संबंधी सूत्रविधियां

हाई स्कूल में प्रवेश लेने वाले बच्चे भिन्नों के जोड़ बाकी, गुणा और भाग के सवाल कर पाएंगे। किन्तु छात्रों की जांच करते समय हम मात्र सूत्रविधियों पर उनकी दक्षता पर ही ध्यान देते हैं। यदि कोई छात्र इन सूत्रविधियों के उपयोग में गलती करे तो हम निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि वह भिन्न की समझ में कमजोर है। आम तौर पर यह आसानी से पता लगाया जा सकता है कि किस ढंग की प्रकियागत गलती हुई है। आइए, प्राइमरी कक्षाओं के बच्चों द्वारा दिए गए दो जवाबों को देखते हैं।

जवाब 1 $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=\frac{8}{14}$

जवाब 2 $\frac{7}{9}-\frac{2}{3}=\frac{5}{27}$

E8) उपरोक्त प्रत्येक जवाब में बच्ची ने उत्तर तक पहुंचने में किस प्रक्रिया का उपयोग किया होगा?

E9) तीन अन्य ऐसी गलतियों के उदाहरण दीजिए जो आपने देखी हों। यह भी बताइए कि उन उत्तरों तक पहुंचने में छात्र ने किस तर्क का सहारा लिया होगा?

ये अभ्यास करवाते समय आपने ध्यान दिया होगा कि जवाब 2 में बच्ची ने अलग–अलग संक्रियाओं की विधियों को मिला दिया है।

सूत्रविधि का उपयोग करते समय विभिन्न सूत्रविधियों को मिला देना एक प्रमुख मुद्दे के रूप में उभरता है। सूत्रविधि का उपयोग करते समय इस गलती को संभालने पर खास ध्यान दिया जाना चाहिए।

जवाब 1 में समस्या सूत्रविधि को गलत ढंग से लागू करने की है। सूत्रविधि लागू करते समय इस गलती पर ध्यान देना भी एक मुद्दा है।

उपरोक्त स्थितियों के अलावा ऐसे भी कुछ मामले होते हैं जिनमें गलतियों का कोई पैटर्न नहीं होता। ऐसे मामले प्रायः सूत्रविधि को लागू करने में हताशा के कारण उत्पन्न होते हैं। किन्तु ऐसे मामलों में स्थिति उतनी गंभीर नहीं होती।

यदि हम भिन्नों से जूझने के बारे में सोचें, तो पता चलता है कि चार में से कोई भी क्रिया करते हुए कई सूत्रविधियों का ध्यान रखना होता है। किन्तु बच्चों का काम मात्र इतनी सूत्रविधियों से नहीं चलेगा।

चार बुनियादी क्रियाओं की विधियों के अलावा कई अन्य सूत्रविधियां हैं :

क) एक भिन्न पर क्रियाएँ

1) तुल्य भिन्न पता करना

2) सरलतम रूप में बदलना

3) विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न में या मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में बदलना।

4) भिन्न को दशमलव संख्या में या दशमलव संख्या को भिन्न में बदलना

ख) दो या दो से अधिक भिन्नों की क्रियाएं, जैसे तुलना।

कई विभिन्न परिस्थितियां ऐसी होती हैं जिनमें छात्रों को थोड़ी–सी अलग सूत्रविधि का उपयोग करना होता है। यदि इसकी वजह से छात्रों के दिमाग में होने वाले भ्रम को कम करना है, तो जरूरी होगा कि भिन्नों के बारे में उनकी अवधारणात्मक समझ को पुख्ता किया जाए।

जोड़ और बाकी की सूत्रविधि

जैसे– $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$

हम जानते है इसे करने के दो तरीके हैं

1) तिर्यक गुणन से, यानी $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1\times6+1\times4}{24}=\frac{10}{24}$

2) लघुत्तम समापवर्त्य के उपयोग से यानी पहले 4 और 6 का लघुत्तभ समापवर्त्य निकालें जो 12 आएगा और फिर उत्तर $\frac{5}{12}$ प्राप्त करें।

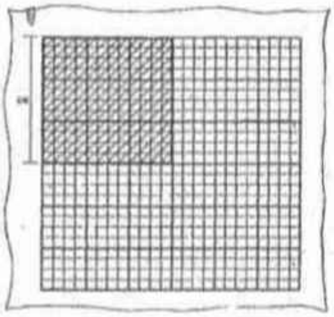
? ये दोनों विधियां एक ही उत्तर क्यों देती है। यानी इनसे हमें दो तुल्य भिन्नें क्यों मिलती हैं?

गतिविधि : बराबर आकार के दो बड़े वर्ग बनाइए (ग्राफ कागज़ का उपयोग किया जा सकता है।) [चित्र 1 (क) 2 (ख)]

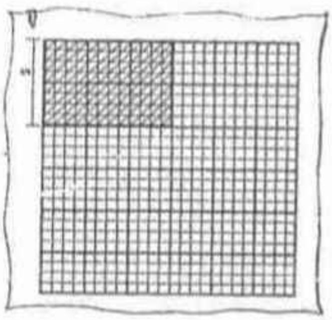
मान लीजिए कि $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{6}$ को जोड़ना चाहते हैं। बच्चों से कहिए कि वे प्रत्येक ग्राफ कागज पर $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{6}$ भाग रंग दें।

अब उनसे कहिए कि वे एक आयत (या वर्ग) लें जिसकी मदद से वे प्रत्येक रंग भरे क्षेत्र को ठीक–ठीक नाप सकें।

यहां मापन की इकाई में काफी विविधता उभर सकती है। कुछ छात्र इन रंगें हुए क्षेत्रों को एक इकाई से नाप सकते हैं जो पूरे वर्ग का $\frac{1}{24}$ हो (चित्र 2 (क)) कुछ छात्र $\frac{1}{12}$ और कुछ अन्य छात्र $\frac{1}{48}$ की इकाई भी ले सकते हैं (चित्र 2 (ख) और 2 (ग))



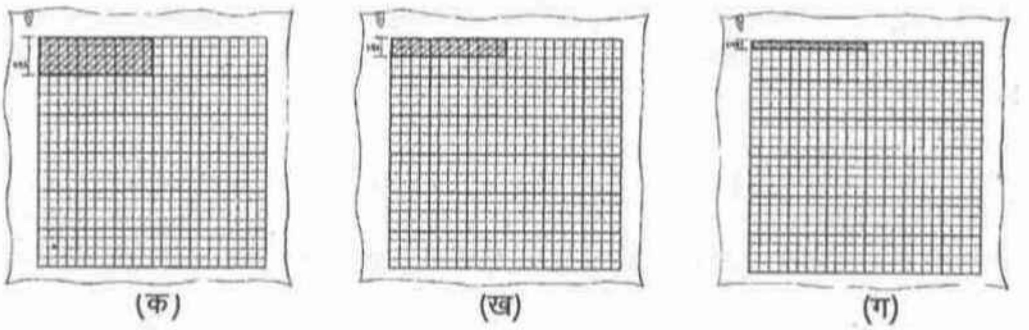
(क)



(ख)

चित्र 1

इस तरह वे देख पाएंगे कि $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{6}$ दोनों के तुल्य ऐसी भिन्नें होंगी जिनके हर समान होंगे। इन्हें वे जोड़ना जानते हैं।



चित्र 2

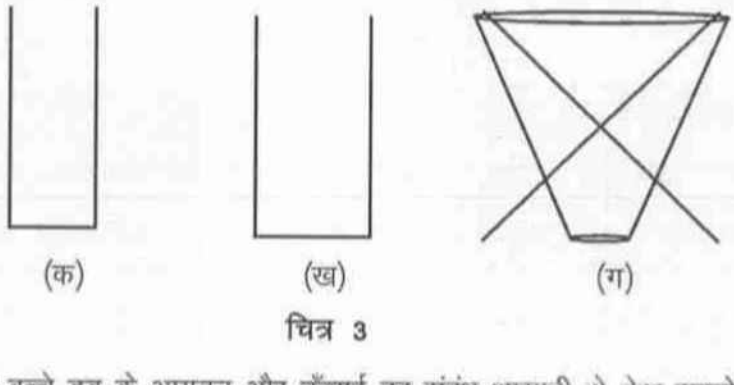
अब पूरी कक्षा में उन बच्चों के साथ चर्चा कीजिए जिन्होंने अलग–अलग समान हर प्राप्त किए हैं। इस चर्चा से वे यह समझ पाएंगे कि जोड़ करने के लिए किसी भी समान हर का उपयोग किया जा सकता है। तथा यह भी समझाएं कि ये 'अलग–अलग' उत्तर क्यों आ रहे हैं। इस चर्चा से वे यह समझ पाएंगे कि ये सारी भिन्नें तुल्य हैं और वास्तव में हर के किसी भी गुणज का उपयोग किया जा सकता है व कौन–सा सबसे सुविधाजनक हर होगा। हो सकता है सबसे सुविधाजनक हर कभी तो सामान्य गुणज हो और कभी लघतम समापवर्त्य।

E10) उपरोक्त गतिविधि का उपयोग आप अलग–अलग हर वाली भिन्नों की बाकी की सूत्रविधि समझाने के लिए कैसे करेंगे?

E11) इसके अलावा और कौन सा तरीका आप सोच सकते हैं जिससे बच्चों को सूत्र विधि समझने में मदद मिले?

कई विधियाँ : सूत्र विधि को ग्राफ से समझाने के बाद शिक्षक ने कुछ और उदाहरणों से भिन्नात्मक संख्या के जोड़ की विधि उन्हें बताई। फिर उसने बच्चों से कहा,

मापक जार की सहायता से भी गतिविधि करवाई जा सकती है। मापक जार पारदर्शी पदार्थ से बना एक बेलनाकार/आयताकार जार होता है। (चि 3 (ग) में दर्शाए जार का उपयोग नहीं किया जाना चाहिए।



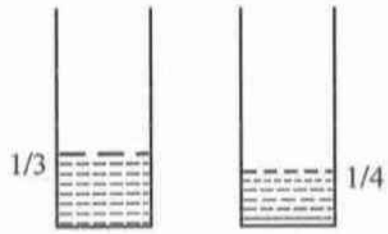
चित्र 3

क्योंकि क व ख में बच्चे द्रव के आयतन और ऊँचाई का संबंध आसानी से देख सकते हैं। जैसे जार में एक–तिहाई आयतन पानी की ऊँचाई जार की ऊँचाई की एक–तिहाई होगी।

एक शिक्षक द्वारा मापक जार की मदद से असमान भिन्नों की बाकी पर की गई चर्चा–

उदाहरण 1 : शिक्षक कक्षा में 10 मापक जार लेकर आई। बच्चों ने विभिन्न भिन्नों की समझ विकसित करने के लिए इस मापक जार का उपयोग कई मर्तबा किया था।

शिक्षक ने यह समझाना शुरू किया कि $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ क्या होता है? शिक्षक ने उन्हें $\frac{1}{3}$ 'जार' और $\frac{1}{4}$ 'जार' दिखाया (चित्र 4)।



चित्र 4

शिक्षक : इन दो जारों को देखो। पहला जार $\frac{1}{3}$ भरा है और दूसरा $\frac{1}{4}$ भरा है। मान लो मैं दूसरे जार का पानी पहले जार में डाल दूँ। अब पहले जार में कितना पानी होगा?

बच्चे : $\frac{2}{3}$

शिक्षक : कैसे?

बच्चे : आपने $\frac{1}{3}$ निशान के ऊपर पानी डाला। वह अगले निशान तक भर गया। तो यह $\frac{2}{3}$ है। अब शिक्षक ने समझाया कि दोनों मापक जारों के भाग अलग–अलग है। इसके बाद उन्होंने बच्चों से पूछा कि दोनों मापक जारों का पानी मिला देने के बाद $\frac{2}{3}$ से कम होगा या ज्यादा। कुछ बच्चों ने कहा कि पानी $\frac{2}{3}$ से कम होगा, जबकि बाकी बच्चे खामोश रहे।

शिक्षक : चलो, क्या तुम यह बता सकते हो कि पानी आधे से ज्यादा होगा या आधे से कम?

बच्चे : आधे से कम।

शिक्षक : चलो, यह देखते हैं कि क्या पानी डालने से पहले हम उत्तर का अन्दाजा लगा सकते हैं। प्रत्येक जार में कितने भाग हैं?

बच्चे : पहले जार में तीन भाग और दूसरे जार में चार भाग।

शिक्षक : तुम्हें यहाँ जोड़ने में दिक्कत आ रही है क्योंकि भाग बराबर नहीं हैं। परन्तु मैं इन भागों को बांटकर भागों की संख्या बदल सकती हूं। मान लो मैं पहला जार लेकर उसके प्रत्येक भाग को दो भागों में बाँट दूं। तब मेरे पास कितने भाग होंगे?

बच्चे : छः भाग।

शिक्षक : सही। अब भी दोनों जारों के भाग बराबर नहीं हुए। पहले जार में तीन भाग और दूसरे जार में चार भाग हैं। यदि मैं पहले जार के प्रत्येक भाग को चार भागों में बाँट दूँ, तो कुल कितने हो जाएँगे?

बच्चे : (गणना करने में कुछ वक्त लेते हैं) 12 भाग।

शिक्षक : अब यदि मुझे दूसरे जार पर भी 12 भाग चाहिए, तो प्रत्येक भाग को कितने भागों में बाँटना होगा?

बच्चे : प्रत्येक भाग को तीन छोटे–छोटे भागों में बाँटना पड़ेगा।

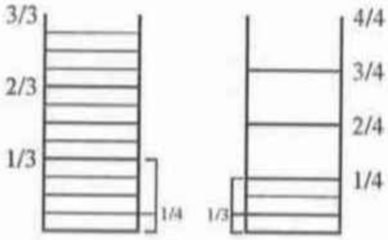
शिक्षक : सही। यदि तुम पहले जार के प्रत्येक भाग को 4 भागों में और दूसरे जार के प्रत्येक भाग को 3 भागों में बाँट दो, तो दोनों जारों पर 12–12 भाग हो जाएँगे।

बच्चे अपनी नोट बुक में बने जार के चित्रों के भागों को बाँटकर देखते हैं कि दोनों जारों में 12–12 भाग बनते हैं

एक बच्ची : (हाथ उठाते हुए) टीचर, पहले जार में 3 भाग हैं और हम प्रत्येक भाग को 4 भागों में बांटते हैं। दूसरे जार में 4 भाग हैं इसके प्रत्येक भाग को हम 3 भागों में बांटते हैं।

शिक्षक : अच्छा ध्यान दिया तुमने। क्या कोई मुझे ये बता सकता है कि यह क्यों किया जाता है– 3 भागों में प्रत्येक के 4 भाग और 4 भागों में प्रत्येक के तीन भाग?

एक बच्ची : क्यों 3 × 4 और 4 × 3 बराबर हैं।



चित्र 5

शिक्षक : अब बताओं $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ को कैसे जोड़ेंगें।

बच्चे : (चुप हो गए)

शिक्षक : हमने जो छोटे भाग किए हैं उनके रूप में $\frac{1}{3}$ कितना है?

बच्चे : $\frac{4}{12}$ है।

शिक्षक : ठीक। और छोटे भागों के रूप में $\frac{1}{4}$ कितना है?

बच्चे : $\frac{3}{12}$ है।

शिक्षक : क्या अब तुम $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ को जोड़ सकते हो?

(शिक्षक ने उनसे कहा कि वे इसे अपनी–अपनी नोट बुक में लिख लें।)

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ दोनों जार में भागों की समान संख्या = 12

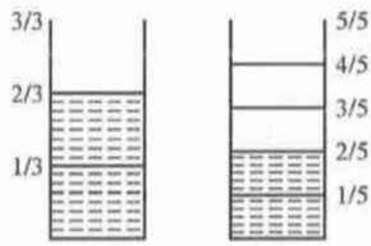
$$\frac{1}{3}=\frac{1\times 4}{3\times 4}=\frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{3}{12}$$

इसीलिए $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$

शिक्षक ने पूछा कि यह आधे से अधिक है या कम। कई बच्चे इस प्रश्न का उत्तर दे पाए। मापक जार के साथ कुछ और ऐसे उदाहरणों की चर्चा के बाद शिक्षक ने उन्हें छोटी–छोटी भिन्नों के जोड़ के कई सवाल दिए। इस प्रक्रिया के दौरान वे उलट गुणित की विधि से परिचित हो गए। मापक जार का यह मॉडल शिक्षक को बहुत भाया क्योंकि उलट गुणित की प्रक्रिया का प्रत्येक चरण इससे मेल खाता है।

E11 बताइए कि आप मापक जार का उपयोग $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$ को हल करने के लिए कैसे करेंगे।



चित्र 6

उदाहरण 2 : शिक्षक ने शुरूआत $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$ से की।

शिक्षक : बच्चों, ये दो जार हैं। पहला $\frac{1}{4}$ है और दूसरा $\frac{5}{6}$। क्या तुम बता सकते हो कि मैं $\frac{1}{4}$ व $\frac{5}{6}$ को कैसे जोड़ूं?

बच्चे : हम पहले जार के प्रत्येक भाग को 6 भागों में और दूसरे जार के प्रत्येक भाग को 4 भागों में बाँट सकते हैं।

शिक्षक : तब प्रत्येक जार पर कितने भाग होंगे?

बच्चे : (गिनकर) 24 भाग।

शिक्षक : ठीक। हाँ, इस सवाल को करने का यह एक तरीका है। परन्तु इसमें भागों की संख्या बहुत ज्यादा हो जाएगी। क्या हम जारों को इससे कम भागों में बाँटकर काम नहीं चला सकते?

बच्चे : (चुप हो गए।)

शिक्षक : दोनों जारों को देखो। क्या तुम्हें कोई निशान दोनों जारों में मेल खाते दिखते हैं?

बच्चे : हाद, पहले जार का $\frac{2}{4}$ दूसरे $\frac{3}{6}$ जार के निशान से मेल खाता है।

शिक्षक : बढ़िया। अब इन दोनों जारों को मेल खाते निशानों तक देखते हैं (चित्र 7)। (शिक्षक मेल खाते निशानों पर एक लाइन खींच देती है।) अब बताओं कि मिलान रेखा तक दोनों जारों में कितने–कितने भाग हैं?

बच्चे : (क) जार में 3 भाग और (ख) जार में 2 भाग।

शिक्षक : बिल्कुल ठीक। मान लो कि मैं सिर्फ मिलान रेखा तक ही दोनों जारों में बराबर–बराबर बनाना चाहती हूँ। इसके लिए क्या करना होगा?

बच्चे : (सोचकर) आप पहले जार (क) के प्रत्येक भाग को 2 भागों में और दूसरे जार (ख) के प्रत्येक भाग को 3 भागों में बांट सकती हैं। तब दोनों जारों में मिलान रेखा तक 6–6 भाग हो जाएंगे।

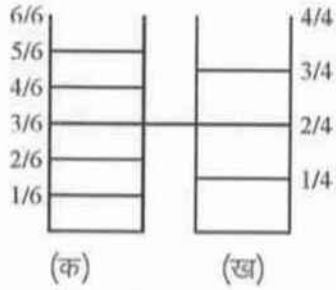
शिक्षक : बढ़िया। क्या अब तुम मिलान रेखा के ऊपर के भागों को भी इसी तरह बांट सकते हो?

बच्चे : हाँ, कर सकते हैं। ऊपर भी 6–6 भाग हो जाएंगे।

शिक्षक : तो दोनों जारों पर कुल कितने–कितने भाग हुए।

बच्चे : 12–12 भाग।

शिक्षक : अब तुम $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$ को जोड़ सकते हो?



बच्चे : हाँ, टीचर और उन्होंने अपनी–अपनी नोट बुक में इसे निम्नानुसार लिखा–**चित्र 7**

दोनों जारों में भागों की बराबर संख्या = 12

$4 \times 3 = 12$

$6 \times 2 = 12$

$$\frac{1}{4}=\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{3}{12}, \quad \frac{5}{6}=\frac{5\times2}{6\times2}=\frac{10}{12}$$

इसीलिए $$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3}{12}+\frac{10}{12}=\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$$

इसके बाद शिक्षक ने उन्हें समझाया कि इन्हें जोड़ते हुए वे 24 भागों का उपयोग भी कर सकते हैं और 12 भागों का भी। वास्तव में 4 और 6 का कोई भी सामान्य गुणज 'भागों की संख्या" के रूप में लिया जा सकता

है। इस मौके पर शिक्षक ने उन्हें यह भी समझाया कि सबसे कम सामान्य गुणज को ही लघुतम समापवर्त्य (LCM) भी कहते हैं। यहां लघुतम समापवर्त्य 12 है। अर्थात् वे यह सवाल लघुतम समापवर्त्य से भी कर सकते हैं।

इस तरह से शिक्षक ने उन्हें यह महसूस कराया कि जोड़ 'उलट गुणित' विधि से भी किया जा सकता है और 'लघुतम' विधि से भी।

यदि हम यह सवाल पूछें कि भिन्नों की सूत्रविधियों में बच्चे इतनी गलतियां क्यों करते हैं, तो सबसे प्रमुख बात यह सामने आती है कि भिन्नों के मामले में बच्चों को यह सावधानी रखनी होती है कि जोड़ते समय बराबर आकार (साइज) के टुकड़ों को ही जोड़ें। यह बच्चों के लिए एक नई बात होती है क्योंकि उन्हें पूर्णांक संख्याओं को जोड़ने का अभ्यास है जो सदैव बराबर साइज की होती है। जोड़ व बाकी की विधियों का अभ्यास कर रहे बच्चों के लिए यह समझना जरूरी है कि सारी संबंधित भिन्नों में जो टुकड़े हों वे बराबर साइज के होने चाहिए। उलट गणित या लघुतम निकालने या किसी अन्य विधि का मकसद यही है।

लिहाजा इसे समझने का पहला कदम भिन्नों की समझ से जुड़ा है। भिन्नों का अर्थ क्या है और कैसे अलग–अलग हरों वाली भिन्नें तुल्य हो सकती हैं। यह समझना भी जरूरी है कि हर बढ़ने के साथ भिन्न छोटी होती जाती है। बच्चों को यह भी समझना होगा कि भिन्नों की तुलना करने से पहले उनके हरों को बराबर करना जरूरी होता है क्योंकि तभी तुलना किए जा रहे टुकड़े बराबर साइज के होते हैं यही स्थिति जोड़ में भी होती है।

गुणा और भाग की सूत्रविधि

प्रक्रिया के लिहाज से देखें तो शायद भिन्नों के गुणा की सूत्रविधि सबसे आसान है। भिन्नों का गुणा करने के लिए मात्र इतना करना होता है कि अंशों और हरों का अलग–अलग गुणा कर लिया जाए। चूंकि गुणा की सूत्रविधि इतनी आसान है, इसलिए तर्क दिया जाता है कि इसमें अवधारणात्मक ज्ञान पर ध्यान देने की जरूरत नहीं है। किन्तु गुणा की क्रिया का अर्थ समझना कहीं ज्यादा पेचीदा मसला है।

पूर्णांक संख्याओं में तो गुणा का मतलब है बराबर समुच्चयों की एक निश्चित संख्या का जोड़। क्या यही परिभाषा भिन्नों पर भी लागू होती है? बच्चों को आप इस बात का आभास कैसे देंगे कि भिन्नों के गुणा का अर्थ क्या है? यह समझना तो शायद आसान हो कि $4\times\frac{1}{3}$ (या $\frac{1}{3}\times 4$) का अर्थ है '$\frac{1}{3}$ को 4 बार जोड़ना, मगर यह समझना काफी कठिन है कि '$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$' का मतलब $\frac{2}{3}$ को $\frac{1}{3}$ बार जोड़ना' होता है।

भिन्नात्मक संख्याओं में गुणा–ठोस संदर्भ से : भिन्नात्मक संख्या के गुणा के लिए, ठोस संदर्भ में ऐसे गुणा के बारे में क्या आम जीवन में इनके कोई उदाहरण हैं? जैसे– आप बच्चों से पूछ सकते हैं कि यदि सोहन और मोहन के पास एक सेब था और दोनों ने इसे बराबर–बराबर बांटा तो प्रत्येक को कितना मिलेगा? और इसके पहले कि वे अपना–अपना हिस्सा खा पाते, दो दोस्त और आ गए। मोहन और सोहन ने उन्हें भी सेब में से बराबर हिस्सा देना तय किया। तो अन्त में मोहन को कितना सेब मिलेगा?

यदि प्रिया के पास एक सेब और दीपिका के पास एक सेब था और दोनों ने विवेक को अपने हिस्से से आधा–आधा सेब दिया तो विवेक के पास कितने सेब होंगे?

इस तरह के और उदाहरण लेकर व अन्य और उदाहरण बनवाकर, आप धीरे–धीरे उन्हें यह समझने मे मदद कर सकते हैं कि $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ का अर्थ होता है आधे का आधा और $2\times\frac{1}{2}$ का मतलब होता है दो बार आधा।

गुणा का अर्थ क्या है:

बच्चों के साथ चर्चा के दौरान इसे धीरे–धीरे भिन्नों से गुणा का सामान्य रूप दिया जा सकता है। उन्हें यह समझाया जा सकता है कि गुणा का अर्थ 'का' भी होता है। जैसे– जब आप पूर्णांक संख्याओं की क्रियाएं करते हैं तो गुणा का मतलब होता है कोई समुच्चय कितनी बार जबकि शुद्ध भिन्न से गुणा करने का मतलब होता है किसी का इतना हिस्सा।

अर्थात् किसी राशि या संख्या का आंशिक भाग लेने के लिए हम उसमें भिन्न से गुणा करते हैं। हम अक्सर इस बात को जाने बगैर ऐसा करते रहते हैं। आइए, ऐसी कुछ स्थितियां देखते हैं।

(i) एक व्यंजक विधि में 5 लोगों के लिए कोई डिश बनाने के लिए जरूरी वस्तुओं बताई गई हैं । यदि तीन लोगों के लिए बनाना है, तो प्रत्येक वस्तु कितनी ली जाए? हां, इस मामले में थोड़ा लगभग से काम चल सकता है।

(ii) हमें 1 कि.ग्रा. प्याज का दाम पता है और हम $\frac{3}{4}$ कि.ग्रा. प्याज के दाम पता करना चाहते हैं।

(iii) 1 कट्टे चावल के दाम के आधार पर हम $\frac{2}{3}$ कट्टे चावल के दाम पता करना चाहें।

(i) 3 लोगों ने मिलकर कोई काम किया और आमदनी को उनके बीच बांटना है। यदि एक व्यक्ति ने $\frac{1}{5}$ काम किया है और शेष 2 ने मिलकर $\frac{2}{5}$ काम किया है, तो आमदनी का बंटवारा उनके योगदान के अनुपात में करना होगा। इसमें एक ही राशि में अलग–अलग भिन्नों से गुणा करना होगा।

E12) ऊपर दी गई स्थितियों से अलग, आम जीवन की दो ऐसी स्थितियां बताइए जहां भिन्नों से गुणा का उपयोग होता है। आम जीवन के उदाहरणों का उपयोग करते हुए आप बच्चों को भिन्नों से गुणा का 'अमूर्त अर्थ ग्रहण करने में कैसे मदद करेंगे?

E13) प्राकृत संख्याओं में गुणा तथा भिन्नात्मक संख्याओं में गुणा करने क्या–क्या फर्क है? जैसे: प्राकृत संख्याओं में गुणनफल बड़ा होता है या संख्या के बराबर होता है। क्या भिन्नात्मक संख्या में ऐसा होता है? और फर्क भी ढूंढें।

भिन्नात्मक संख्या का गुणा व सूत्रविधि :

भिन्नों से गुणा की संभव स्थितियों में आपने ध्यान दिया होगा कि बंटवारे की स्थितियों में भिन्नों से गुणा की जरूरत पड़ती है। बारम्बार बंटवारा या हिस्से का हिस्सा (जैसे मुनाफे के $\frac{1}{5}$ भाग का $\frac{1}{3}$ भाग) जैसी स्थितियों में भी भिन्न से गुणा करना होता है। इनमें से कई स्थितियां अवश्य ऐसी हैं जिनको भिन्नों के गुणा की सूत्रविधि का उपयोग किए बिना भी हल किया जा सकता है। हमारा कहना यह नहीं है कि ऐसे सवालों को हल करने के लिए भिन्नों के गुणा की सूत्रविधि जानना जरूरी है। मुद्दा वास्तव में यह है कि बच्चे इसकी अवधारणात्मक समझ विकसित करें ताकि वे ऐसी स्थितियों से विश्वासपूर्वक निपट सकें। इसके अलावा उनमें यह क्षमता विकसित होनी चाहिए कि वे इन स्थितियों का उपयोग करते हुए भिन्नों की अमूर्त धारणा तक पहुंच सकें। उनका

सम्पर्क ऐसी स्थितियों से कराया जाना चाहिए और उन्हें एक सम्पूर्ण, एक संग्रह या एक राशि का आंशिक भाग लेते हुए इन स्थितियों से परिचित हो जाना चाहिए। भिन्नों के गुणा की सूत्रविधि को सीखना और उपयोग करना इस प्रकार की स्थितियों से संपर्क का एक अवसर देता है। इससे इस प्रकार की स्थितियों से निपटने के लिए जरूरी समझ व हुनर सुदृढ़ करने में मदद मिलती है। सूत्रविधि की जानकारी सुविधा प्रदान करती है और अवधारणात्मक समझ सूत्रविधि के उपयोग को अर्थपूर्ण बना देती है।

उपरोक्त उदाहरणों को सावधानीपूर्वक समझते हुए हमने देखा कि भिन्नों का गुणा प्रक्रिया के स्तर पर तो आसान है किन्तु अवधारणा के स्तर पर पेचीदा है। इसका अर्थ यह है कि हमें क्रिया का अर्थ पढ़ाने से कतराना नहीं चाहिए। मॉडल्स के जरिए बच्चों का सम्पर्क इस बात से होना चाहिए कि भिन्नों से गुणा का अर्थ क्या है। लेकिन प्रत्येक उदाहरण को मॉडल के रूप में प्रस्तुत करने को न कहें।

गुणा की क्रिया में भी कई चरण होते हैं। ये चरण निम्नानुसार है :

1) एक इकाई भिन्न से पूर्णांक संख्या को गुणा करना। जैसे $\frac{1}{3}\times 2$

2) इकाई भिन्न को इकाई भिन्न से गुणा करना। जैसे $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

3) किसी उचित भिन्न को इकाई भिन्न से गुणा करना। जैसे $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$

4) एक उचित भिन्न को किसी दूसरी उचित भिन्न से गुणा करना। जैसे $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$

गुणा की क्रिया को समझने के लिए बच्ची को ये सारे चरण सीखने होंगे। एक बार गुणा की प्रक्रिया पर निपुणता पा ली हो तो भाग की प्रक्रिया सीखना काफी आसान है। किसी भिन्न से भाग का अर्थ है उसकी विलोम भिन्न से गुणा करना। यह काफी सरल दिखता है। मगर आंख मूंदकर सूत्रविधि का उपयोग करते हुए बच्चे ढेरों गलतियों करते हैं।

भिन्नात्मक संख्याओं में भाग :

गुणा की अवधारणात्मक समझ के पक्ष में हमने तर्क दिए थे, वे अधिकांशतः भाग पर भी लागू होते हैं। विभिन्न परिस्थितियों में किसी सूत्रविधि को कारगर ढंग से उपयोग कर पाने के लिए जरूरी है कि बच्ची के पास संबंधित क्रिया का कुछ अवधाराणात्मक ज्ञान हो। बच्ची को भाग की बुनियादी समझ हेतु पूर्णांक संख्याओं के भाग से संबंधित दो किस्म के अर्थों का पुनरावलोकन जरूरी है।

1) भाग बतौर 'समूहीकरण' (बारम्बार घटाना) और

2) भाग बतौर 'बराबर वितरण'

$12 \div 4$ की व्याख्या दो तरह से की जा सकती है –
(i) '12 वस्तुओं का 4 के बीच बराबर–बराबर बंटवारा' (ii) 12 में 4–4 के कितने समूह हैं?
यही दो अर्थ भिन्नों पर भी लागू होते हैं,

जैसे – $\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$ हम इसका अर्थ यह लगा सकते हैं: ''इकाई भिन्न $\frac{1}{4}$ का 3 गुना इकाई भिन्न $\frac{1}{4}$ के

दुगने के बीच बराबर बांटा गया''।

अब यदि हम $\frac{1}{4}$ को एक वस्तु के रूप में दर्शाएं तो इसका अर्थ होगा कि ऐसी 3 वस्तुओं को ऐसी ही 2 के बीच बराबर–बराबर बांटना है। अर्थात् इन 2 में से प्रत्येक को ऐसी $1\frac{1}{2}$ वस्तुएं मिलेंगी। ध्यान दें कि यहां वह वस्तु आंशिक भाग $\frac{1}{4}$ है। अतः उत्तर $1\frac{1}{2}$ है। यानी $\frac{3}{4} \div \frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$

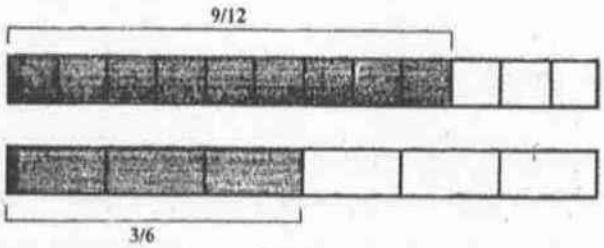
यह प्रक्रिया समझाना मुश्किल है। फिर भी यदि हम भिन्न चार्ट जैसे साधनों का उपयोग करें, तो यह प्रकिया आसानी से दिखा सकते हैं।

E14) समझाइए कि $3\frac{1}{4}$ में कितने $2\frac{1}{4}$ हैं? क्या आप बीजगणित की मदद से इसे हल कर सकते हैं?

भिन्नात्मक संख्या के भाग को कैसे समझें :

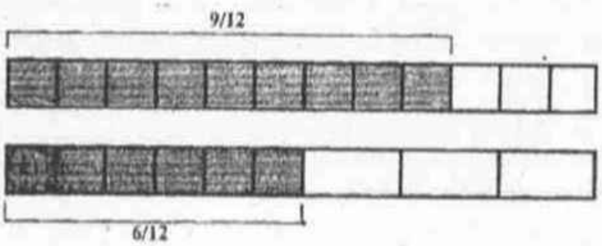
$\frac{9}{12} \div \frac{3}{6}$ को समझना –

इसमें हम भाज्य $\frac{9}{12}$ को 9 बार $\frac{1}{12}$ के रूप में तथा भाजक $\frac{3}{6}$ को 3 बार $\frac{1}{6}$ के रूप में दर्शा सकते हैं। (चित्र 8)



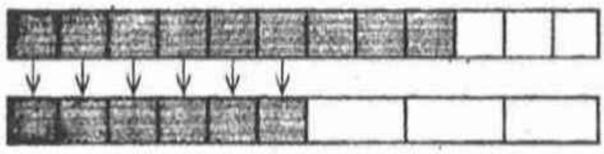
चित्र–8

इसके बाद तीन $\frac{1}{6}$ जो हैं उन्हें हम छह $\frac{1}{12}$ के रूप में दिखाएं। (चित्र 9)



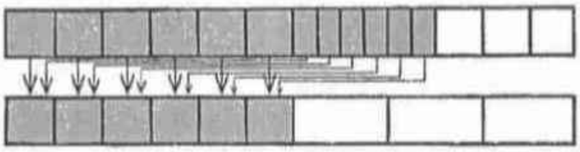
चित्र 9

अब भाज्य में से एक–एक $\frac{1}{12}$ को भाजक के प्रत्येक छह $\frac{1}{12}$ में बांट दीजिए। (चित्र 10)



चित्र 10

अब बचे भाज्य के तीन $\frac{1}{12}$ इनमें से प्रत्येक को 2 बराबर भागों में बांटकर इन तीन से छः बना लेंगे। हर भाग पूरे का 24 होगा। इन छः $\frac{1}{24}$ को भाजक के छः $\frac{1}{12}$ में एक – एक बांट देंगे। (चित्र 11)



चित्र 11

अब देखते हैं कि भाज्य के छः $\frac{1}{12}$ में से प्रत्येक को भाज्य के कितने $\frac{1}{12}$ मिले हैं? चित्र के अनुसार प्रत्येक को डेड़ ऐसे हिस्से मिले हैं।

अर्थात् $\frac{9}{12} \div \frac{3}{6} = 1\frac{1}{2}$ इसका अर्थ यह रहा कि प्रति भाजक $1\frac{1}{2}$ आया।

अतः भिन्नों का भाग बच्चों के लिए एक अपेक्षाकृत कठिन अवधारणा है। हमें तुल्य भिन्न पता करने के लिए भी सूत्रविधि का उपयोग करना होता है। इसलिए आपको तुल्य भिन्न की सूत्रविधि से संबंधित अवधारणा की भी अच्छी समझ की जरूरत होगी। जैसे – $\frac{9}{12} \div \frac{3}{6}$ को ही लीजिए। यहां तो एक या दोनों भिन्नों को इस तरह बदलना सम्भव था कि दोनों के हर बराबर हो जाएं। उसके बाद भाज्य की इकाई भिन्नों को भाजक की इकाई भिन्नों में वितरित कर दिया गया। हम निम्नानुसार आगे बढ़ते हैं :

E15) आप अलग–अलग हरों वाली भिन्नों पर भाग बराबर–बराबर बाँटकर और भाग समूहीकरण करके अर्थ कैसे लागू करेंगे? जैसे $\frac{9}{12} \div \frac{3}{6}$ पर?

भिन्नात्मक संख्याओं में भाग समझना :

भिन्नात्मक संख्या में गुणा की तरह भाग को भी कुछ श्रेणियों में समझा जा सकता है। भाग की क्रिया को समझने के लिए इन का ध्यान रखना होता है। ये श्रेणियाँ इस तरह की हैं :

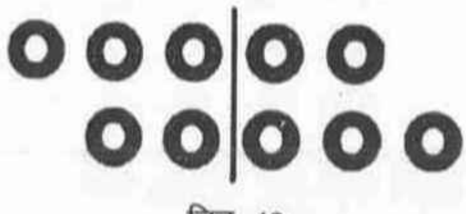
1) पूर्णांक संख्या में भिन्न का भाग

2) भिन्न संख्या में पूर्णांक संख्या का भाग

3) एक उचित भिन्न में दूसरी उचित भिन्न का भाग

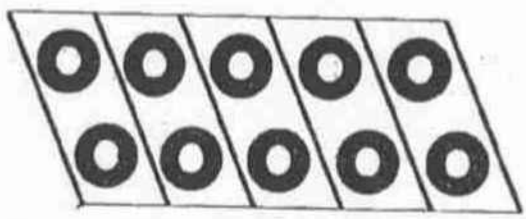
4) एक भिन्न में दूसरी भिन्न का भाग

पहले हम पूर्णांक संख्याओं के भाग को देखेंगे जैसे – $10 \div 2$ इसे ठोस वस्तुओं की मदद से दर्शाने के दो तरीके हैं। पहला तरीका है, कंचे जैसी 10 वस्तुएं लेकर उन्हें दो बराबर समूहों में बांट लीजिए। प्रत्येक समूह में 5 वस्तुएं होंगी। यही भागफल है। (बच्चे इसे करते समय कोई भी पैटर्न अपना सकता है।)



चित्र 12

दूसरा तरीका यह हो सकता है कि हम दो–दो के समूह बनाएं और देखें कि कितने समूह बनते हैं। हमें 2–2 के 5 समूह मिलते हैं। अतः भागफल 5 है।



चित्र 13

अतः पूर्णांक संख्याओं के भाग को दो अलग–अलग अर्थ दिए जा सकते हैं। पहला यह है कि 10 कंचों को 2 बराबर समूहों में बांटिए और देखिए कि समूह में कितने आए। और दूसरा तरीका है 10 कंचों से 2–2 के समूह बनाए और देखें कि कितने समूह बने।

भिन्न से भाग (जैसे $10 \div \frac{1}{2}$) को हम 10 कंचों को $\frac{1}{2}$ बराबर समूहों में बाँटने की बजाय यह प्रश्न पूछना सार्थक है कि 10 कंचों में कितने $\frac{1}{2}$ कंचे हैं।

अभ्यास :

1. कुछ और सवाल इसी तरह से सोचकर करो जिससे भिन्नों के जोड़ की सूत्रविधि समझ में आ जाए।

2. कक्षा 7 की एनसीईआरटी द्वारा प्रकाशित गणित की पुस्तक के अध्याय को पढ़ो व उसमें दिए अभ्यासों को करो।

सूत्रविधि के मुद्दे से जुड़ा एक और महत्वपूर्ण पहलू अनुमान लगाने की क्षमता का है।

भिन्नात्मक संख्या व अनुमान

गणित में यह अंदाजा लगा पाना की यह संख्या कितनी बड़ी है और लगभग कितनी होगी आवश्यक है। जैसे– यह सोच पाना कि 98 × 987 एक लाख से कम है और 95000 से अधिक संख्याओं को समझने में मदद देता है। इसी तरह अगर हमें यह पता करना हो कि आधे का पौना कितना है तो यह सोचना होगा कि

यह कितना होगा। क्या यह $\frac{1}{2}$ से अधिक होगा, क्या $\frac{1}{4}$ से अधिक होगा अथवा कम होगा? इससे अंदाज लगाने से हमें न सिर्फ संक्रिया। के उत्तर को जांचने में वरन संख्याओं व संक्रियाओं को समझने में भी बहुत मदद मिलती है।

इस दृष्टि से चलिए कुछ उदाहरण देखते हैं जहाँ हमें भिन्नात्मक संख्याओं के गुणा का अंदाज लगाना होगा।

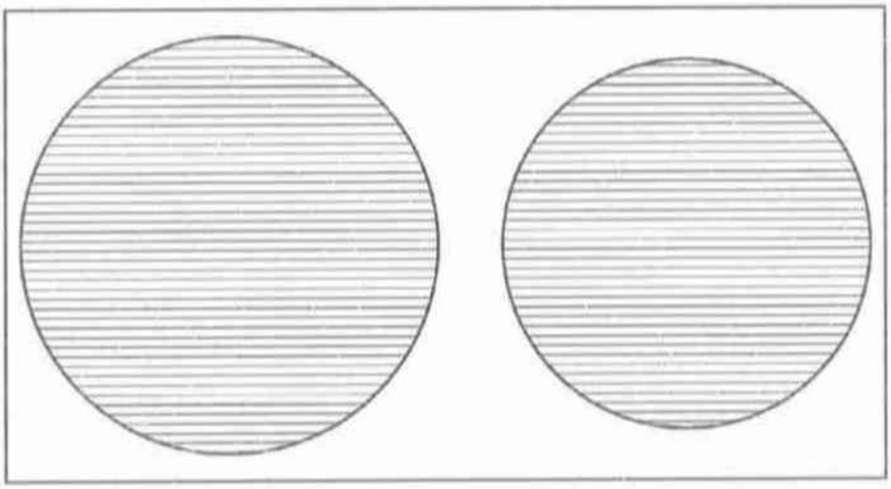
स्थिति 1 : सुषमा के पास कुछ पाने हैं जिन पर $\frac{3}{16}$ से.मी., $\frac{4}{16}$ सेमी. .... $\frac{15}{16}$ सेमी. आदि लिखे हुए हैं। वह निम्नलिखित बातें जानना चाहती है :

i) उसके $\frac{3}{4}$ सेमी. के नट में सेमी. का 16वाँ भाग किस पाने में फिट होगा?

ii) एक ओर नट के लिए उसे $\frac{1}{2}$ सेमी. साइज से अगला साइज चाहिए। वह पाना कौन सा है?

स्थिति 2 : जैकब स्कूल से $\frac{3}{4}$ किमी. की दूरी पर रहता है। घर से स्कूल वह बस से आता है और लौटता पैदल है। एक दिन बस की हड़ताल हो जाती है ओर उसे पैदल ही स्कूल आना है। वह यह जानना चाहता है कि उसे घर से लगभग किस समय निकलना चाहिए। वह इतना जानता है कि उसे अपनी चाची के घर पहुंचने में 25 मिनट लगते हैं जो उसके घर से 2 कि.मी. दूर उल्टी दिशा में है।

स्थिति 3 : स्कूल में पर्यावरण अध्ययन के अन्तर्गत प्रोजेक्ट में एक बच्ची को एक आयताकार बोर्ड पर दो चकतियां बनानी है। यदि उसे यह पता है कि इन दो चकतियों का व्यास $6\frac{1}{2}$ सेमी. और $5\frac{3}{4}$ सेमी. होना चाहिए और इनके बीच कम से कम 1 सेमी. की दूरी होनी चाहिए (चित्र 15) तो उसे लगभग कितना लम्बा बोर्ड खरीदना चाहिए।



चित्र 14

उपरोक्त स्थितियां दर्शाती हैं कि कुछ संदर्भों में बच्ची को भिन्नों के परिमाण का अनुमान लगाना होता है ताकि यह पता चल सके कि कोई भिन्न कितनी बड़ी है। शायद किसी अन्य भिन्न से तुलना करने के लिए यह जानना जरूरी हो। किसी अन्य संदर्भ में हो सकता है कि बच्चों को दो भिन्नों के योग/अन्तर का अनुमान लगाने की जरूरत हो या किसी समुच्चय के आंशिक भाग का अनुमान लगाने की जरूरत पड़े। अर्थात् उन्हें भिन्नों की क्रियाओं के परिणाम का अनुमान लगाने की जरूरत पड़ सकती है। लिहाजा यह जरूरी है कि बच्ची भिन्नों का अनुमान लगाने के गुरों से परिचित हो।

अनुमान लगाने के गुर : यह स्पष्ट है कि अनुमान लगाना बगैर सोचे कोई भी संख्या बोलना नहीं है। आपके द्वारा पहचानी गई संख्या लगभग वही होनी चाहिए जिनकी जरूरत है। आइए, देखते हैं कि अगले उदाहरण में भी एक शिक्षक बच्चों को भिन्नों का अनुमान लगाने की क्षमता का विकास करने में किस प्रकार मदद देती है।

उदाहरण : प्राथमिक स्कूल की शिक्षक विनीता ने यह समझ लिया था कि बच्चों को भिन्न सिखाने का एक महत्वपूर्ण पहलू यह है कि उनमें यह अनुमान लगाने की क्षमता विकसित की जाए कि भिन्नात्मक संख्या कितनी बड़ी है। इसके लिए उसने पहले यह पता किया कि क्या उसके छात्रों को $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ जैसी सरल भिन्नों का अन्दाज है। इसकी जांच के लिए उसने बच्चों को तरह–तरह के सवाल दिए। इसके बाद उसने कमरे में जो वर्गाकार मेज़ थी उसे छात्रों से एक छड़ की मदद से उसकी लम्बाई नपवाई। सबसे पहले अनु ने मेज की लंबाई नापी और बताया कि लंबाई 5 पूरी छड़ ओर छड़ के थोड़े–से हिस्से के बराबर हैं शिक्षक ने अनु से इस हिस्से पर निशान लगाने को कहा । फिर उसने बोर्ड पर लिखा :

मेज की लंबाई = 5 छड़ + छड़ का एक भाग

शिक्षक – निशान लगा हिस्सा कितना है – क्या यह छड़ के $\frac{1}{2}$ से कम है या $\frac{1}{2}$ से ज्यादा है?

कुछ बच्चे – $\frac{1}{2}$ से ज़्यादा।

एक बच्ची – 'वास्तव में यह हिस्सा छड़ के $\frac{3}{4}$ से भी ज्यादा है।

शिक्षक – बहुत बढ़िया। तब क्या मैं कह सकती हूं कि मेज़ की लंबाई लगभग छः छड़ है?

सभी बच्चे धीरे–धीरे मान गए।

अब शिक्षक ने एक और लंबाई नापने को कहा। यह लंबाई इस प्रकार आई

लम्बाई = 5 छड़ + छड़ का एक हिस्सा

शिक्षक – यह हिस्सा कितना है?

बच्चा – यह छड़ का $\frac{1}{4}$ है।

शिक्षक – यदि मैं कहूं कि लम्बाई लगभग '6 छड़' है तो क्या तुम मानोगे?

कुछ बच्चे – नहीं।

शिक्षक – क्यों?

एक बच्ची – लम्बाई 5 छड़ ओर एक छड़ का थोड़ा सा हिस्सा ही है। यह हिस्सा छड़ की पूरी लम्बाई से बहुत ही कम है।

यह तर्क सबको ठीक लगा। अब लम्बाई यह हुई :

लम्बाई I = 5 छड़ + भाग ($\frac{3}{4}$ से ज्यादा यानि 1) = 5 छड़ + 1 छड़ = 6 छह (लगभग)

लम्बाई II = 5 छड़ + भाग ($\frac{1}{4}$) = 5 छड़ + 0 = 5 छड़

उसने समझाया कि पहले मामले में भाग लगभग पूरी छड़ के बराबर था जबकि दूसरे मामले में वह भाग इतना छोटा था कि हम उसे छोड़ सकते हैं।

यदि हम ज्यादा सही ढंग से करना चाहें उसने समझाया , तो यदि कोई हिस्सा $\frac{1}{2}$ से ज्यादा हो तो हम लगभग करके 1 मान लेते हैं जबकि $\frac{1}{2}$ से कम होने पर उसे शून्य मानते हैं। जैसा कि हमने ऊपर किया।

इस गतिविधि के जरिए शिक्षक ने बच्चों को यह समझने में मदद की कि उनके लिए यह जानना बहुत जरूरी है कि कौन–सी भिन्न 0 के करीब, कौन–सी $\frac{1}{2}$ के करीब, और कौन–सी 1 एक के करीब हैं। यह पता होने पर ही वे भिन्नों का अच्छा अनुमान लगा पाएंगे। जैसे – भिन्न $\frac{7}{8}$ के लिए यह अनुमान लगाना आना चाहिए कि वह 0, 1, $\frac{1}{2}$ में से किसके अधिक करीब है। इस पहलू को विकसित करने के लिए शिक्षक ने उन्हें सवाल दिए, जैसे ही शिक्षक ने बोर्ड पर सवाल लिखा।

प्रश्न : निम्नलिखित भिन्नों को पूरा करो ताकि वे $\frac{1}{2}$ के करीब हों किन्तु उससे ज्यादा रहें

$$\frac{....}{8}, \frac{....}{11}, \frac{....}{13}, \frac{....}{21}, \frac{9}{....}, \frac{3}{....}, \frac{6}{....}$$

इसके बाद शिक्षक चाहती थी कि बच्चों में भिन्नों की गणनाओं के अपेक्षित उत्तर का अनुमान लगाने की क्षमता विकसित होनी चाहिए। इसके लिए उसने बच्चों को निम्नलिखित सवाल दिया।

प्रश्न : सूत्रविधि का उपयोग किए बगैर पता लगाओ कि

$\frac{8}{9}+\frac{9}{11}=\frac{17}{11}$ सही है या नहीं।

मगर कुछ बच्चों ने तो कोई उत्तर नहीं दिया। कुछ बच्चों ने कहा कि यह गलत है मगर वे इसका कोई कारण नहीं दे पाए। इसी बीच मीरा ने यह कारण बताया:

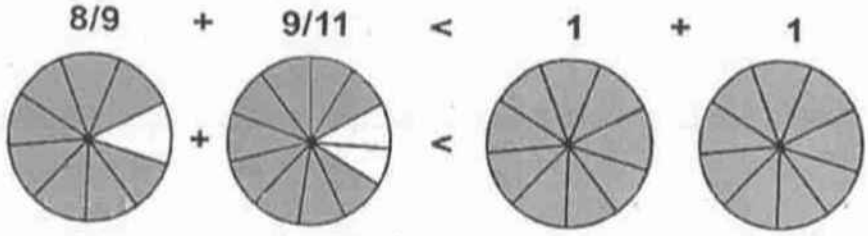
$\frac{8}{9}$ तो 1 से कम है।

$\frac{9}{11}$ भी 1 से कम है।

इसलिए मुझे लगता है कि जोड़ 2 से कम होना चाहिए। शिक्षक ने पूछा कि उसे ऐसा क्यों लगता है? मीरा ने कहा कि जब दोनों ही 1 से कम हैं तो उनका जोड़ भी 2 से कम होगा।

शिक्षक ने इस बात को पूरी कक्षा के लिए निम्नानुसार स्पष्ट किया :

मान लो इन दोनों को जोड़ा जाए, तो यह इस प्रकार होगा।



चित्र 15

इसलिए जोड़ 2 से कम आएगा।

फिर उसने पूछा, मान लो तीन ऐसी भिन्नों को जोड़ा जाए तो जोड़ कितना होगा और क्यों?

छात्रों ने कहा, जोड़ 3 से कम होगा।

अब उसने निम्नलिखित सवाल बोर्ड पर लिखा:

प्रश्न : मान लो दो भिन्नें हैं, दोनों $\frac{1}{2}$ से कम है। यदि इन्हें जोड़ा जाए तो जोड़ क्या होगा। क्यों?

कुछ बच्चों ने इसका सही उत्तर दे दिया जबकि अन्य बच्चों को उत्तर खोजने में शिक्षक ने मदद की इसके बाद उसने इसी से संबंधित कई और सवाल दिए। अपने अनुभव से शिक्षक ने समझ लिया कि अनुमान का हुनर विकसित करने के लिए जरूरी है कि बच्ची को चारों क्रियाओं से संबंधित तरह–तरह के सवाल करवाए जाएं और लम्बे समय तक इसका अभ्यास करवाया जाए।

E16 आप किसी बच्ची को किसी संख्या के अंश का अनुमान लगाने में कैसे मदद करेंगे? जैसे 720 का $\frac{23}{49}$

E17 3 नये उदाहरण सोचे जिनसे बच्चों को भिन्नात्मक संख्याओं के जोड़ को समझने में मदद मिले।

सारांश

1) हमने भिन्नों पर सूत्रविधियों का उपयोग करते समय बच्चों की गलतियों के कारणों का पता लगाया।
2) इस बात को रेखांकित किया कि भिन्नों की सूत्रविधियां सीखने–सिखाने के लिए भिन्नों की क्रियाओं का अवधारणात्मक ज्ञान जरूरी है।
3) सूत्रविधियों की कार्य प्रणाली को समझने के लिए शिक्षण साधनों का उपयोग किया जा सकता है।
4) बच्चों में भिन्नों का अनुमान लगाने की क्षमता को विकसित करने के तरीके खोजें।

❋❋❋❋❋❋❋

पाठ – 6
दशमलव के रूप में व्यक्त भिन्नों पर चर्चा

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- दशमलव भिन्न मुश्किल क्यों है?
- दशमलव भिन्न में स्थानीय मान
- सूत्रविधि को बच्चे कैसे समझें?
- गुणा व भाग
- गुणा की सूत्रविधि
- भाग की सूत्रविधि
- दशमलव भिन्नों का अनुमान
- सम्निकटन करना
- सारांश

परिचय

इस पाठ में हम दशमलव भिन्नों को समझेंगे। दशमलव भिन्न स्थानीय मान की संकेत पद्धति को इस तरह विस्तार देता है कि एक से छोटी संख्याओं को भी प्रदर्शित करना संभव हो जाता है। प्राकृत संख्याओं की सूत्रविधियों को परिवर्तित व विस्तृत रूप दशमलव भिन्न संख्याओं के लिए उपयोग होता है। इससे दशमलव चिह्न की उपयोगिता बहुत बढ़ जाती है और इन्हें संख्याओं के कहीं व्यापक समूह पर लागू किया जा सकता है।

भिन्न के उपयोग से जोड़, बाकी, गुणा और भाग की सूत्र विधियां, पूर्णांक संख्याओं और उनसे संबंधित सूत्रविधियों के ज्ञान को दशमलव भिन्नों पर लागू करना सरल नहीं है। बच्चों को पूर्णांक संख्याओं से दशमलव में कदम रखने में कठिनाई होती है। कठिनाई मुख्य रूप से दशमलव भिन्नों की संकेत पद्धति को समझने और संख्याओं में एक से छोटे हिस्सों के स्थानीय मान संरचना को समझने में होती है। इस पाठ में हम दशमलव भिन्न समझने में बच्चों को आने वाली दिक्कतों की चर्चा करेंगे। साथ ही दशमलव भिन्न प्रस्तुत करने के कुछ ऐसे तरीके सुझाएंगे जिनसे बच्चों को दशमलव संख्याओं पर समझ बनाने में सुविधा हो। दशमलव भिन्न के संदर्भ में स्थानीय मान की अवधारणा विकसित करने में मदद मिल सके।

हम दशमलव संख्याओं में चारों बुनियादी क्रियाओं व उनसे संबंधित सूत्रविधियों पर भी विचार करेंगे। यह देखेंगे कि इसमें से बच्चे कितना समझ पाते और कितनी हद तक। बच्चों के साथ काम करते हुए हम लगातार इस बारे में व सूत्रविधियों में निहित तर्क के बारे में सोचें और नई विधियां विकसित करें जिससे वे और ज्यादा सहज हो सकें।

उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- दशमलव पद्धति की बच्चों की समझ का आकलन कर सकेंगे।
- इकाई, दसवें भाग और सौवें भाग के संदर्भ में अपनी शिक्षण योजना का मूल्यांकन कर सकेंगे।

- इस बात की जाँच कर पाएँगे कि विभिन्न क्रियाओं की सूत्रविधि बच्चों तक कैसे पहुँच रही हैं।
- बच्चों में यह क्षमता विकसित करने के तरीके खोज पाएँगे कि वे दशमलव भिन्नों की विभिन्न क्रियाओं के परिणामों का अनुमान लगा सकें।

दशमलव भिन्न मुश्किल क्यों है?

पड़ोस के एक स्कूल के कक्षा 5 के बच्चों को दशमलव की चार बुनियादी क्रियाएं सिखाई गई थीं। इस पर आधारित परीक्षण में उनका प्रदर्शन भी अच्छा ही रहा था। एक वर्ष बाद कक्षा 6 में उन्हें निम्नलिखित सवाल दिए गए :

(i) .025, 0.3, 0.233 और 0.1678 में से सबसे बड़ी संख्या बताओ।

(ii) 8.6 में से 2.78 घटाओ।

(iii) $30.5 \div 10$

कई बच्चों ने (i), (ii) व (iii) के उत्तर क्रमशः 0.1678, 6.18 और 35 दिए।

बाद में इन बच्चों से पूछा गया कि ये उत्तर उन्होंने कैसे निकाला? उनके जवाब निम्नलिखित थे: 0 व 1678 उत्तर देने वाली एक बच्ची ने हमें बताया, "जिस संख्या में जितने ज्यादा अंक होते हैं वह उतनी ही बड़ी होती है। इसलिए उत्तर 0.1678 है।"

एक अन्य बच्ची ने सवाल (ii) को इस तरह किया :

$$\begin{array}{r} 8.6 \\ \underline{-2.78} \\ 6.18 \end{array}$$

उसने अपना तरीका बताया कि पहली संख्या के आखिरी स्थान पर कोई अंक नहीं है, इसलिए मैंने 8 लिखा, फिर 7−6 = 1 और 8−2 = 6.

तीसरे सवाल के बारे में एक बच्ची ने बताया कि 10 का भाग देने के लिए हम दशमलव बिन्दु को दाईं ओर खिसकाते हैं। इसलिए उत्तर 35 आएगा।

इनमें से किसी में भी बच्चों को यह आभास तक न था कि अपने उत्तरों को कैसे परखें। कहीं यह तो नहीं? उन्हें शायद यह भी पता नहीं था कि दशमलव संख्या होती क्या है। बाद में हमने यह पता करने का प्रयास किया कि उनकी कक्षा में शिक्षक दशमलव क्रियाएं सिखाने के लिए क्या रणनीति अपनाती थी। हमने पाया कि वे कुछ उदाहरणों के जरिए बच्चों को मानक सूत्रविधि बता देती हैं। इसके बाद इस पर आधारित कई सवाल करवाती हैं। इससे वे उस तरह के सवाल उस समय कर पाते हैं। ज़ाहिर है कि उनकी कक्षा के बच्चों को दशमलव भिन्नों को समझने में दिक्कत है।

[?] उनकी रणनीति बच्चों के सीखने में मददगार क्यों नहीं हो पा रही है?

पहले सवाल में बच्ची ने सोचा कि "जितने ज्यादा अंक उतनी बड़ी संख्या।" कई बच्चे इस तरह का उत्तर उनकी अवधारणात्मक समझ, जिस वजह से गलती हुई, के कारण हो सकते हैं?

जब यह सवाल कुछ शिक्षकों के सामने रखा गया तो उनके जवाब अलग–अलग थे। जैसे –

मत I : कक्षा 3 तक आते–आते अधिकांश बच्चे यह नियम सीख लेते हैं कि संख्या में मात्र कितने अंक हैं यह देखकर सबसे बड़ी संख्या पहचानी जाती है। वे ज्यादा अंकों वाली संख्या देखते ही उसे सबसे बड़ी संख्या कह देते हैं। यह नियम सीधा और सरल है तथा पूर्ण संख्याओं के लिए सही है। इसी नियम को जब दशमलव बिन्दु की परवाह किए बगैर दशमलव संख्याओं पर लागू किया जाता है, तो समस्या पैदा हो जाती है।

मत II : एक दशमलव संख्या के दो भाग होते हैं – पूर्णांक संख्याओं की एक शृंखला दशमलव बिन्दु की बाईं ओर तथा संख्याओं की दूसरी लड़ी दाईं ओर। प्रायः इन दोनों को अलग–अलग देखना छात्रों को स्पष्ट नहीं होता और वे दोनों भागों को पूर्णांक संख्याओं की तरह देखते हैं। कुछ बच्चे, जैसे – संख्या 13.6 को इस रूप में लेते हैं कि 13 और शेष 6।

मत III: कुछ शिक्षक बताते हैं कि बच्चे कभी–कभी यह सोचते हैं कि दशमलव संख्याओं का नियम पूर्णांक संख्याओं से उल्टा होता है। तब वे किसी छोटी (लम्बाई में छोटी) दशमलव संख्या को लम्बी संख्या से बड़ा मान लेते हैं, जैसे $0.3 > 0.539$ मान लेते हैं। इसका कारण यह सामान्यीकरण है कि जब आप दशमलव बिन्दु से दाईं ओर आगे बढ़ते हैं तो संख्या छोटी होती जाती है, जैसे बाईं ओर बढ़ने पर संख्या बढ़ती जाती है।

मत IV : कुछ शिक्षकों ने बताया कि कभी–कभी बच्चे सोचते हैं कि दशमलव संख्या 0 से छोटी संख्या दर्शाती है। अक्सर दशमलव भिन्न संख्याओं से बच्चों का परिचय ऋणात्मक संख्याओं के साथ–साथ ही होता है। कक्षा 6 व 7 में यदि उन्हें संख्या रेखा पर 0.36 दर्शाने को कहे तो वे इसे शून्य के बाईं ओर रख देते हैं।

शिक्षकों द्वारा बताए गए इन सभी कारणों में बच्चे विभिन्न नियमों व प्रकियाओं के बीच भ्रम में रहते हैं। अक्सर उन्हें नियम और शार्ट कट्स बता दिए जाते हैं या ऐसी अपर्याप्त परिभाषाएं बता दी जाती हैं जो उन्हें यह मौका ही नहीं देती कि वे स्वयं उस अवधारणा को टटोल सकें और विकसित कर सकें। ये गलतियां बच्चों के आम भ्रमों को भी प्रतिबिम्बित करती हैं। जब हम बच्चों के कार्य व उत्तरों को देखते हैं, तो उनके दिमागों में क्या चल रहा है इसके बारे में हमें बहुत कुछ पता चलता है। उनका अवधारणात्मक ढांचा, भ्रम व स्पष्टताएं क्या हैं, इसके बारे में हम सबझ पाते हैं। इसी से हमें यह समझने में मदद मिलती है कि कक्षा में बच्चों के साथ क्या किया जाना चाहिए।

E1) कक्षा V के बच्चों के लिए दशमलव भिन्नों की अवधारणात्मक समझ से संबंधित कुछ सरल सवाल बनाइए। यह सवाल बच्चों को करने को दीजिए,

क) जिन बच्चों ने गलतियां की हैं, उनकी इन गलतियों में कोई पैटर्न दिखता है?

ख) बच्चों से पता कीजिए कि किसी विधि को उपयोग करने का उनका तर्क क्या है?

यदि नियम और विधियां बगैर समझे लागू की जाए तो अन्ततः भ्रम पैदा होते हैं। दशमलव की सूत्रविधियां सीखने के लिए स्थानीय मान पद्धति की समझ, संबंधित संक्रिया की समझ और अनुमान का एहसास होना जरूरी है।

दशमलव भिन्न में स्थानीय मान

दशमलव भिन्न के लिए यह जानना निहायत जरूरी है कि हम एक के हिस्सों की बात कर रहे हैं। याने दशमलव चिह्न के बाद वाला हिस्सा संख्या के उस हिस्से को दिखाता है जो पूर्ण का भाग है।इसके साथ–साथ संख्याओं की तुलना करने की क्षमता होना भी महत्वपूर्ण है।

E2) दशमलव पद्धति से परिचित कराने से पहले किसी बच्ची के पास क्या–क्या पूर्व ज्ञान होना चाहिए?

E3) संक्षेप में बताइए कि आप अपनी कक्षा में व्यापक दशमलव पद्धति का प्रस्तुतीकरण कैसे करेंगे?

E4) बच्चों से संख्याओं को दशमलव पद्धति में लिखने के फायदे पता कीजिए। (जो दशमलव पद्धति से परिचित हों?)

इतना तो स्पष्ट है कि जो सबसे महत्वपूर्ण बातें बच्चों को पता होनी चाहिए, स्थानीय मान उनमें से एक है। दशमलव भिन्नों का उपयोग करते हुए स्थानीय मान की समझ पुष्ट होती है, मगर यह जरूरी है कि उनमें पहले से पूर्ण संख्याओं से स्थानीय मान के उपयोग की समझ हो। इसलिए हमें बच्चों को ऐसे कार्य देने चाहिए जिनसे स्थानीय मान में उनकी समझ को परखने में मदद मिले और उन्हें अपने दिमाग पर जोर डालने व अवधारणा को समझने का मौका मिले। जैसे– आप 10–11 वर्षीय बच्चों को स्थानीय मान की समझ से संबंधित कार्य दें। उन्हें पहले यह ध्यान दिलाएं कि 16 में '1' का मतलब 10 है। फिर उनसे निम्न संख्याओं में 1 का अर्थ पूछें : 301, 2103, 2.1, 2.31 आदि।

ऐसा नहीं है कि इन बच्चों ने प्रयास नहीं किया या उन्हें पर्याप्त अभ्यास नहीं है। अन्य बच्चों की तरह इन बच्चों का सम्पर्क भी पूर्णांक संख्याओं के स्थानीय मान की अवधारणा से हुआ होगा। किन्तु एक बार सम्पर्क हो जाने से और एक समय पर इसे कर पाने से यह गारंटी नहीं होती कि वे इसे फिर से कर ही पाएंगे। इसलिए यह जरूरी है कि इस मुकाम पर एक बार फिर इस अवधारणा को दोहरा लिया जाए। यह भी जरूरी है कि हम प्रत्येक चरण पर उन्हें यह बताएं कि कैसे यह पद्धति दशमलव भिन्नों की क्रियाओं से संबंधित है।

जैसे– दो दशमलव भिन्नों का गुणा।

1.2 और 0.57 का गुणा करने के लिए हम दशमलव को अनदेखा करके 12 और 57 का गुणा कर लेते हैं। बाद में गुणनफल में फिर से दशमलव लगाया जाता है। इसके लिए हम दोनों संख्याओं में दशमलव के बाद के अंक गिन लेते हैं और गुणनफल में उसी हिसाब से दशमलव लगा देते हैं। ($12 \times 57 = 684$; 1.2 में दशमलव के बाद एक अंक है और 0.57 में 2 अंक हैं– कुल तीन ; गुणनफल में दशमलव इस तरह लगाना है कि दशमलव के बाद तीन अंक रहें– उत्तर 0.684)।

जोड़ और बाकी

एक दस वर्षीय बच्ची को 0.26 और 0.3 जोड़ने को कहा गया, तो उसने यह सवाल इस तरह किया–

$$\begin{array}{r} 0.26 \\ +0.03 \\ \hline 0.29 \end{array}$$

जब पूछा गया कि उसने 0.3 को 0.03 क्यों लिखा, तो उसने बताया कि उसकी कक्षा में शिक्षक ने ऐसा बताया था कि दो दशमलव भिन्नों को जोड़ते वक्त दोनों संख्याओं को एक जैसा बनाना चाहिए। यानी उनमें शून्य लगाकर दोनों

में दशमलव के बाद अंकों की संख्या बराबर कर लेनी चाहिए। इसलिए उसने 2 के नीचे शून्य लगा दिया।

[?] शिक्षक के शॉर्टकट ने बच्ची को इस क्रिया को बेहतर ढंग से करने में मदद क्यों नहीं की?

यदि आपने सही अनुमान लगाया है, तो समस्या यह है कि बच्ची को संख्याएं लिखने के लिए जरूरी समझ निर्मित करने में मदद नहीं दी गई। उसे इस बात का कोई अन्दाज नहीं है कि शून्य क्यों लगाया जाता है और किस तरह लगाया जाना चाहिए। उसे यह समझ नहीं है कि दसवें भाग, सौवें भाग को देखना होता है। अतः वह यह नहीं समझ पाई कि हर स्थान पर बराबर मान के भाग जोड़े जाते हैं। जाहिर है कि उसे इस बात की समझ नहीं है कि 'दशमलव भिन्न के दाईं ओर शून्य लगाने से संख्याओं का मान नहीं बदलता जबकि बाईं ओर शून्य लगाने पर मान बदल जाता है' इसलिए जोड़ी जा रही संख्याओं को बदले बिना जोड़ करने के लिए शून्य दायीं ओर लगेगा। पूर्ण संख्याओं में अगर अंकों की संख्या बराबर करनी है। तो शून्य किस जगह लगाएंगे? और क्यों?

शार्टकट की गफलतः

मेरा एक और दिलचस्प अनुभव सुनिए।

एक बार मैंने एक 10 वर्षीय बच्चे से 0.4 और 0.8 को जोड़ने को कहा। उसका जवाब 0.12 था। इसके बाद मैंने '0.4 और 0.8 को जोड़ने' का वही सवाल थोड़ा अलग ढंग से पूछा। मैंने उससे पूछा, 'मान लो कि दो अलमारियां आस–पास रखी हैं ओर उनकी लम्बाइयां 0.4 मीटर और 0.8 मीटर हैं। अलमारियों की लम्बाई बताओ।' लगता है कि वह जानता था कि 0.4 मीटर का मतलब 40 सेमी. और 0.8 मीटर का मतलब 80 सेमी. होता हैं। उसने इन्हें जोड़कर पता लगाया कि यह 120 सेमी. यानी 1.2 मीटर है। जब मैंने उससे पूछा कि 'तुमने 1 मीटर और 20 सेमी. को 1.2 मीटर क्यों लिखा' तो उसने बताया कि 1 मीटर और 20 सेमी. लिखने की बजाय 1.2 मीटर लिखना ज्यादा आसान है। अर्थात् इस संदर्भ में उसे पता था कि बिन्दु मीटर और सेमी. को पृथक करता है।

[?] ऐसा क्यों है कि दूसरे मामले में बच्चा सवाल सही हल कर लेता है जबकि पहले मामले में नहीं कर पाया था?

यह इसलिए हो सकता है कि दूसरे मामले में बच्चे ने इस प्रक्रिया में निहित सिद्धांत को समझ लिया था। स्थिति उसके लिए परिचित थी। और पहले में उसे कोई शार्टकट ठीक में समझने से रोक रहा है।

सूत्रविधि में शिक्षक आम तौर पर पाठ्यपुस्तक का शब्दशः अनुसरण नहीं करते। हममें से अधिकांश लोग दशमलव बिन्दु को अपने मन में रखते हैं और जब दसवें भाग से इकाई पर जाते हैं तो दशमलव बिन्दु लगा कर इकाई को घटाने लगते हैं। अर्थात् किताब में दिया गया नियम और शिक्षक जो बोर्ड पर करेंगे, उसमें अन्तर है चूंकि बच्ची के पास किताब उपलब्ध है, अतः सवाल हल करते समय बच्ची विधि में स्पष्टीकरण के लिए अपनी किताब देख सकती है, इसलिए शिक्षक द्वारा बताई विधि और किताब में दिए गए नियम के बीच बहुत अन्तर नहीं हो। और बच्ची जो भी तरीका उपयोग करे उसे समझे व अपने ढंग से आगे बढ़े।

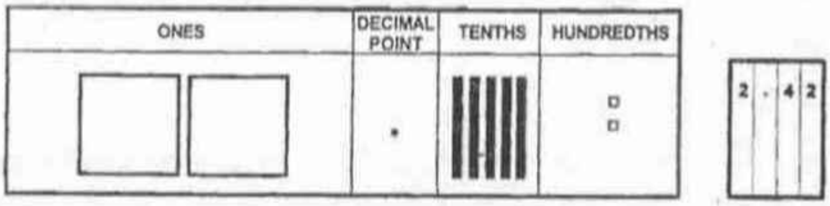
यदि आप जोड़ और बाकी की विधियां देखें, तो पाएंगे कि अंकों का मिलान करना यानी सही स्थान पर रखना सबसे महत्वपूर्ण चरण है। अर्थात् दसवें भाग के अंकों को एक स्तम्भ में, सौवें भाग के अंकों को एक स्तम्भ में और इसी प्रकार से विभिन्न मान के अंकों को लिखना। इसके बाद समान स्थान वाले अंकों को घटाना और घटाते हुए 'उधार' का नियम याद रखना। यदि बच्ची इनमें से किसी भी चरण पर गलती करती है तो गलत उत्तर आएगा।

सूत्रविधि को बच्चे कैसे समझें :

आप बच्ची को यह सूत्रविधि समझा नहीं सकते। सबसे अच्छा तो यही होता है कि बच्ची स्वयं सूत्रविधि विकसित करे। अपनी सूत्रविधि उसे आत्मसात् करनी होगी।

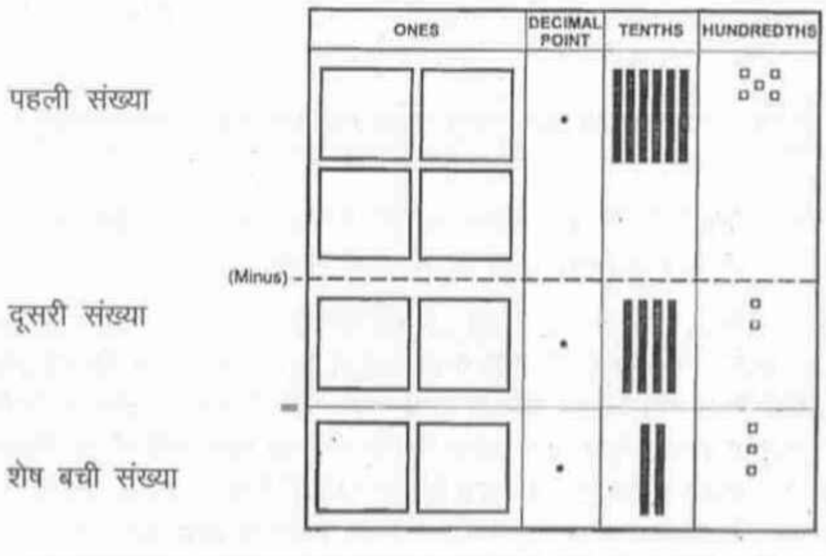
उदाहरण द्वारा देखें कि शिक्षक अपने बच्चों को बाकी की सूत्रविधि विकसित करने में कैसे मदद करती है।

उदाहरण 2 : शिक्षक ने बच्चों को 100 भागों में बंटे वर्ग से दशमलव संख्याएं लिखने से परिचित करा दिया था। छात्रों को इतना अभ्यास हो चुका था कि वे एक वर्ग (चित्र 1) और उससे संबंधित स्थानीय मान तालिका के साथ काम कर लेते थे।



चित्र 1

इस कक्षा में शिक्षक बाकी की सूत्रविधि करवाना चाहती थी। शुरूआत उसने 4.65 − 2.42 से की और इसे जान बूझ कर आड़े रूप में लिखा। उसने चित्र 2 में दिखाई तालिका बनाई।



चित्र 2 : 4.65 − 2.42 = 2.23

अब उसने बच्चों से कहा कि वे सबसे दाएं स्तम्भ से शुरू करें और स्तम्भवार घटाते जाएं।

शिक्षक : सौवें भाग के स्तम्भ से शुरू करते हैं। इसमें 5 टुकड़े पहली संख्या के हैं और 2 टुकड़े दूसरी संख्या के। तो अन्तर आया 5–2 = 3 टुकड़े। (शिक्षक ने एक और तालिका बनाई) इसी प्रकार से शेष स्तम्भों के साथ भी करते जाओ।

कुछ बच्चे : दसवें भाग के स्तम्भ में हमारे पास 2 पट्टियां रहेंगी।

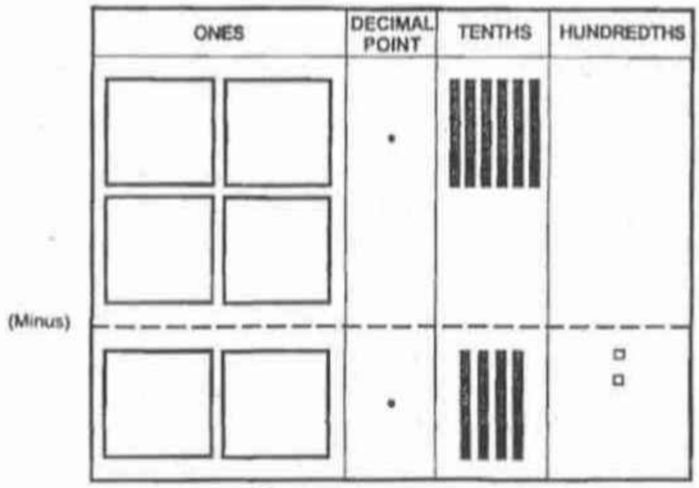
शिक्षक : इसके बाद आएगा दशमलव बिन्दु और उसके बाद?

बच्चे : 2 वर्ग। (शिक्षक ने दो वर्ग बना दिए)

शिक्षक : तो उत्तर क्या हुआ?

बच्चे : 2.23 (शिक्षक ने उत्तर को भी सबसे बाएं स्तम्भ में लिख दिया)

शिक्षक : ठीक है। बहुत बढ़िया। अब मान लो कि 4.65 की बजाय मैं 4.6 लेती हूं और इस में से 2.42 घटाती हूं। इसे कैसे करेंगे ? (उसने सब बच्चों से 4.6–2.42 से संबंधित तालिका बनाने को कहा। उसने खुद भी एक तालिका बनाई (चित्र 3)।



चित्र–3 : 4.6 – 2.42

अब तुम स्तम्भवार घटाओ। सौवें भाग के स्तम्भ से शुरू करो।

छात्रों ने देखा कि पहली संख्या में सौवें भाग पर कोई अंक ही नहीं है। वे थोड़े चक्कर में पड़ गए।

शिक्षक : क्या दिक्कत है?

एक छात्र: (सौवें भाग के स्तम्भ की ओर इशारा करते हुए) यहां तो कोई अंक ही नहीं है। हम क्या करें?

शिक्षक : जब पूर्णांक संख्याओं को घटाते हो तो ऐसे मामले में क्या करते हो?

कुछ छात्र : हम उधार लेते हैं।

शिक्षक : तो यहां भी वही करो।

यहां उसने कक्षा को समझाया कि इकाई, दसवें भाग और सौवें भाग में आपस में उधार–हासिल कैसे करते हैं।

इस तरह करते हुए वे उत्तर 2.18 पर पहुंच गए।

इसके बाद शिक्षक ने उन्हें अलग–अलग अंकों वाली संख्याओं के कई और सवाल दिए। जब उसने देखा कि वे स्थानीय मान की तालिका का उपयोग करते हुए यह क्रिया कर सकते हैं, तो उसने उन्हें यही क्रिया संकेत रूप में करने को कहा; इसके लिए उन्हें निम्नानुसार विस्तृत रूप का उपयोग करने को कहा :

9.84 →	9 इकाई + 8 दसवां भाग + 4 सौवां भाग
4.32 →	4 इकाई + 3 दसवां भाग + 2 सौवां भाग
5.52	5 इकाई + 5 दसवां भाग + 2 सौवां भाग

अन्ततः जब शिक्षक आश्वस्त हो गई कि छात्र लम्बे रूप का संबंध छोटे रूप से जोड़ कर पा रहे हैं तब उनसे छोटे रूप में ही सवाल करने को कहा। इससे शिक्षक ने समझ लिया कि दशमलव की क्रिया समझने के लिए जरूरी है कि बच्चों को लम्बे समय तक बार–बार इसका अभ्यास करने का मौका मिले।

उपरोक्त उदाहरण में शिक्षक ने बच्चों को विभिन्न प्रकार की दशमलव भिन्नों को संकेत पद्धति समझाने और जोड़ की क्रिया समझाने, दोनों के लिए एक ही तरह के प्रतीकों व ठोस वस्तुओं का उपयोग किया।

E5) ऊपर बताई गई गतिविधि को कक्षा 5 के कम से कम 10 बच्चों के साथ आजमाइए और उनकी समझ का मूल्यांकन कीजिए।

E6) आपको क्या लगता है कि उपरोक्त उदाहरण में बच्चों ने दशमलव सख्याओं को घटाने की क्या सूत्रविधि विकसित की होगी ? उस सूत्रविधि को विस्तार से लिखिए।

E7) (i) आप कैसे लिखेंगे।

(ii) क्यों सभी यह सूत्रविधि आपकी तरह ही लिखेंगे?

E8) एक व्यक्ति ने बाकी की यह सूत्रविधि बनाई।

दो दशमलव संख्याओं का अन्तर पता करने के लिए

1) दोनों दशमलव संख्याओं को इस तरह लिखिए कि बड़ी संख्या ऊपर हो और संख्याएं इस तरह स्तम्भों में लिखी जाएं कि दोनों के दशमलव बिन्दु एक ही स्तम्भ में हों और एक ही स्थानीय मान वाले अंक एक ही स्तम्भ में हों;

2) दशमलव बिन्दु को अनदेखा करते हुए संख्याओं को ठीक उसी तरह घटाइए जैसे पूर्णांक संख्याओं को घटाते हैं;

3) परिणाम में दशमलव बिन्दु को दोनों संख्याओं के दशमलव बिन्दु के ठीक नीचे रख दीजिए।

क्या यह विधि ठीक है? कारण सहित बताइए?

गुणा और भाग (दशमलव संख्याओं में)

गुणा और भाग के बारे में प्राइमरी स्कूल के एक शिक्षक ने एक वक्तव्य दिया था।

"दशमलव भिन्नों के गुणा व भाग की सूत्रविधि आसान है। पूरी प्रक्रिया लगभग पूर्णांक संख्याओं के गुणा–भाग जैसी ही है। एकमात्र समस्या दशमलव को सही जगह लगाने की होती है।"

बच्चों को दिए गए ये कथन अन्ततः उन्हें भ्रमित ही करते हैं। जब तक वे किसी नियम का अर्थ व प्रभाव न समझें, वे इसका उपयोग नहीं कर सकते। 10–15 वर्ष के सभी बच्चों को दशमलव भिन्नों के गुणा के संदर्भ में कभी न कभी ऐसा नियम जरूर बताया गया होगा। उनसे अगर दशमलव संख्याओं और उनके गुणा के बारे में बात की जाए तो हम उनकी समझ के बारे में निष्कर्ष निकाल सकते हैं। उदाहरण हम यह पता करने का

प्रयास कर सकते हैं कि क्या वे यह जानते हैं कि दशमलव भिन्न से गुणा करने पर गुणनफल वास्तव में मूल संख्या (गुण्य) से कम आ सकता है।

E9) अपने आसपास के 10–15 वर्ष उम्र समूह के कम से कम 10 बच्चों को दशमलव भिन्नों के गुणा और भाग के 5 सवाल दीजिए। इस आधार पर दशमलव बिन्दु को सही स्थान पर लगाने की उनकी क्षमता की जांच कीजिए।

इस प्रकार बच्चे जो गलतियां करते हैं उनका मूल स्रोत यह पता करने में कठिनाई है कि दशमलव बिन्दु को सही जगह को कहाँ लगाएं। इसकी सूत्रविधि 'सरल' है तो भी बच्चे दशमलव को सही जगह लगाने में गलती करते हैं।

गुणा की सूत्रविधि :

मान लीजिए कोई बच्ची जानना चाहती है कि दो दशमलव भिन्नों, 3.8 और 0.46 का गुणा कैसे करें। आम तौर पर सूत्र यह है कि, दशमलव बिन्दु को अनदेखा करके साधारण ढंग से गुणा कर लो ओर फिर दशमलव बिन्दु के बाद अंकों की कुल संख्या गिनकर दशमलव लगा दो। ($38 \times 46 = 1748$; 3.8 में दशमलव के बाद एक अंक है और 0.46 में 2 अंक है। कुल तीन; इसलिए गुणनफल में दशमलव बिन्दु इस तरह लगाओं के दशमलव बिन्दु के बाद तीन अंक रहें – उत्तर 1.748)

किन्तु यह नियम ऐसा क्यों है समझना होगा? इसे समझने का एक तरीका यह है;

$$3.8 \times 0.46 = \frac{38}{10} \times \frac{46}{100} = \frac{1748}{1000} = 1.748$$

इसमें प्रत्येक के आगे कुल तीन शून्य है। यह दोनों हर में शून्य की संख्या जोड़ने पर मिली है हम व बच्चे कई ऐसे प्रश्नों को हल करके देख सकते हैं कि यह सही बैठता है।

इसी तरह हम व बच्चे धीरे–धीरे सूत्र क्या लेते हैं।

बच्ची के लिए विभिन्न स्थितियों में और विभिन्न प्रकार की संख्याओं के साथ दशमलव भिन्नों के गुणा का मतलब समझना जरूरी है। आपको दो पूर्णांक संख्याओं और दो दशमलव भिन्नों के गुणा के बीच और भी अन्तर नज़र आ सकते हैं।

आइए, देखें कि ये अलग–अलग स्थितियां क्या हैं?

प्रथम स्थिति : किसी दशमलव भिन्न संख्या में पूर्णांक संख्या का गुणा। इसे समझना अपेक्षाकृत आसान है और यह पूर्णांक संख्याओं के गुणा के समान है। जैसे 3×0.6 को '3 बार 0.6 ' के रूप में।

द्वितीय स्थिति : एक दशमलव भिन्न को दूसरी दशमलव भिन्न से या पूर्णांक संख्या से गुणा करना।

किसी संख्या में दशमलव भिन्न से गुणा करने का मतलब है कि पहले उस संख्या में 10 की किसी घात से भाग देना और फिर उसमें किसी पूर्णांक संख्या से गुणा करना। जैसे– 0.3×4

मान लीजिए हम इस क्रिया को 4 के 0.3 भाग के रूप में देखते हैं। इसका मतलब यही है कि 4 के 3 दसवें भाग लेना। अर्थात् $3\times\left(\frac{1}{10}\times 4\right)$

यानी 4 का $\frac{3}{10}$, जो 3 बार 4 के $\frac{1}{10}$ के बराबर है। इसे हम इस तरह भी लिख सकते हैं।

$$0.3 \times 4 = \frac{3}{10} \times 4 = 3 \times \left(\frac{1}{10}\times 4\right) = 3 \times 0.4 = 1.2$$

एक दशमलव भिन्न से गुणा करने में एक महत्वपूर्ण चरण किसी संख्या का दसवां भाग या सौवां भाग लेने का होता है। बच्चों को इसे समझने में समय लग सकता है।

E10) ऊपर वर्णित गुणा की विभिन्न स्थितियों को दर्शाने के लिए आप सौ भागों में बंटे वर्ग का उपयोग कैसे करेंगे?

E11) दो पूर्णांक संख्याओं के गुणा के बारे में तो यह बात सही है कि 'गुणा से संख्या बड़ी हो जाती है'। क्या यह कथन दशमलव भिन्नों के लिए भी सही है? कारण सहित उत्तर दीजिए।

E12) दशमलव भिन्नों के गुणा, दशमलव भिन्न और पूर्णांक के गुणा, पूर्णांक संख्याओं के गुणा के बीच के महत्त्वपूर्ण अन्तर व समानताएं बताइए?

भाग की सूत्रविधि :

सामान्यतौर पर प्रस्तुत भाग की सूत्रविधि इस प्रकार दी जाती है :

एक दशमलव संख्या को पूर्णांक संख्या से भाग देने के लिए हम निम्नलिखित क्रियाएं करते हैं :

1) हम भाग की क्रिया ठीक उसी तरह करते हैं जैसे पूर्णांक संख्याओं का भाग करते हैं (दशमलव को अनदेखा करके)

2) पहले हम भाज्य के पूर्णांक वाले हिस्से में भाग करते हैं। फिर हम भागफल में इकाई के स्थान के दाईं ओर दशमलव बिन्दु लगा देते हैं और उसके बाद भाज्य संख्या के दशमलव वाले हिस्सें में भाग देना जारी रखते हैं।

3) यदि भाज्य संख्या का पूर्णांक वाला हिस्सा शून्य है तो भागफल के इकाई वाले स्थान पर शून्य लिख देते हैं। फिर इकाई के स्थान वाली इस शून्य के दाईं ओर दशमलव बिन्दु लगाते हैं। और इसके बाद भाज्य के प्रत्येक अंक के लिए तब तक एक–एक शून्य लगाते जाते हैं जब तक कि ये अंक मिलकर भाजक से बड़ी संख्या न बन जाएं।

4) यदि भाज्य का पूर्णांक वाला हिस्सा भाजक से कम है तो हम भागफल में इकाई के स्थान पर शून्य लिखते हैं। इसके बाद हम भागफल में इकाई के स्थान के दाईं ओर दशमलव बिन्दु लगा देते हैं। अब यदि भाज्य के पूर्णांक का अंक और दशमलव के बाद वाला पहला अंक मिलकर बनी संख्या भाजक से छोटी हो तो भागफल में दशमलव के दाईं ओर शून्य लगाते हैं। यदि भाज्य के पूर्णांक के अंक और दशमलव के बाद के दो अंक मिलकर बनी संख्या भी भाजक से छोटी हो तो हम एक की बजाय दो शून्य लगाते हैं।

5) यदि अन्तिम शेष शून्य न हो, तो हम भाज्य के दाईं ओर इतनी शून्य लगाते हैं कि अन्तिम शेष शून्य हो जाए।

इस पूरी विधि को इस लिखित रूप में समझना सरल नहीं है। आप अगर इस विधि को ठीक से जानते व उपयोग कर पाते हैं तो भी आपके लिए इसे समझना आसान नहीं है। बच्चे इस विधि तक पहुंच पाएं, उपयोग कर पाएं इसके लिए उन्हें अपनी समझ को व्यक्त करने की ज़रूरत है। इसी से वह धीरे–धीरे ठीक से कर पाएंगे। उन्हें अपने तरीके उपयोग करने के लिए प्रोत्साहित करना होगा वरना वह बिना समझे करेंगे और गलतियां करेंगे।

```
     1.666
3) 5
  -3
   20
  -18
    20
   -18
     20
    -18
      2 – शेष
```

जैसे – अपूर्व ने 5 ÷ 3 को इस तरह किया। बच्चे ने ठीक वही किया जो उसके शिक्षक ने बताया था, 'तीन दशमलव स्थान के बाद रूक जाओ और 2 के सामने शेष लिख दो'।

हमें यह पता लगाना होगा कि बच्चे ने क्या समझा व उसने क्या किया और प्राप्त उत्तर का उसके लिए क्या अर्थ है। इस मामले में बच्चा शायद सोचे कि 5 ÷ 3 = 1.666 और शेष 2 होता है।

एक और उदाहरण

हम भाग की सूत्रविधि को खोलकर देखें। जैसे 0.2 ÷ 3

चरण के अनुसार भागफल में इकाई के स्थान पर शून्य लिखकर उसके बाद दशमलव लगा दिया। अब भाज्य के प्रत्येक अंक के लिए दशमलव बिन्दु के दाईं ओर एक–एक शून्य लगाऊं। यहां भाज्य में एक ही अंक है। सो, मैंने एक शून्य लगा दिया, अब आगे कैसे बढ़ूं? चरण 3 के अनुसार तब तक प्रत्येक अंक के लिए शून्य लगाते जाना है जब तक कि उन अंकों से मिलकर बनी संख्या भाजक से बड़ी न हो जाए। यह साफ नहीं है कि यह 'उन' किन अंकों से संबंधित है। तो हम अटक गए।

? क्या आपको नहीं लगता कि ऐसे सवाल करते समय बच्चों को भी यह समस्या आती होगी?

E13) ऐसी दो और कठिनाइयों का पता लगाएं जो उक्त सूत्रविधि का उपयोग करते समय बच्ची के सामने आती होंगी।

उपरोक्त मामले में पाठ्यपुस्तक की छात्र से अपेक्षा शायद यह है कि वह भाज्य में 2 के बाद तब तक शून्य लगाए जब तक कि 2 से शुरू होने वाली और 3 से बड़ी संख्या न प्राप्त हो जाए। यदि मैं इस बात को मानकर चलूं तो मुझे 20 मिलता है। और भागफल में 0.0 मिलता है।

इसके बाद चरण 5 के मुताबिक मुझे तब तक भाज्य के आगे शून्य लगाते जाना है, जब तक कि शेष शून्य न रह जाए। यदि मैं निम्नानुसार शून्य लगाऊं तो पूर्णांक संख्या के भाग के अपने अनुभव से मुझे अन्तिम शेष संख्या के बाद शून्य लगाना चाहिए, ऐसा करने पर 20 आएगा। यदि मैं 20 को 3 से भाग दूं तो एक बार फिर 2 आ जाएगा।

भागफल अन्तहीन ढंग से आगे बढ़ता है। तो हम कहां रूकें? इस बारे में सूत्रविधि क्या कहती है?

0.2 ÷ 3 के मामले में जो बात हमने देखी कि दशमलव के बाद कोई अंक (यहां 6) बारम्बार दोहराता है, यह कोई अपवाद नहीं है। दरअसल यदि आप $\frac{1.3}{3}$ या $\frac{0.4}{9}$, $\frac{29.6}{99}$ को हल करें तो देखेंगे कि दशमलव

बिन्दु के बाद भागफल में एक अन्तहीन संख्या मिलेगी। इन संख्याओं को लिखकर देखते हैं:

$$\begin{array}{r} 0.066 \\ 3\overline{)\ 0.20} \\ \underline{-0.18} \\ 20 \\ \underline{-18} \\ 2 \end{array}$$

$\frac{0.2}{3} = 0.06666..........$ (6 की पुनरावृत्ति)

$\frac{1.3}{3} = 0.4333..........$ (3 की पुनरावृत्ति)

$\frac{29.6}{99} = 0.29898.............$ (98 की पुनरावृत्ति)

इन सभी में दशमलव भिन्नों में दशमलव बिन्दु के बाद अनन्त अंक हैं, मगर दशमलव के बाद कुछ निश्चित अंक बारम्बार दोहराए जाते हैं।

इसलिए हम दोहराए जा रहे अंको को ऊपर एक '–' (बार) बना देते हैं, जैसे–

$$\frac{0.2}{3} = 0.0\bar{6},\quad \frac{1.3}{3} = 0.4\bar{3},\quad \frac{29.6}{99} = 0.2\overline{98}$$

अभ्यास – 10 ऐसे और उदाहरण ढूंढ़ें जिनमें भाग चलता रहता है।

भाग का अर्थ व विधि : भाग करने की उप–प्रक्रियाओं को समझने के लिए विभिन्न संदर्भों में भाग का अर्थ समझना जरूरी है। जैसे दशमलव भिन्नों के भाग में कई अलग–अलग स्थितियां होती हैं। जैसे–

1) एक दशमलव भिन्न में पूर्णांक संख्या का भाग
2) एक पूर्णांक संख्या में दशमलव भिन्न का भाग
3) एक दशमलव भिन्न में दूसरी दशमलव भिन्न का भाग
4) एक छोटी पूर्णांक संख्या का भाग बड़ी पूर्णांक संख्या में।

बच्चों को इन अलग–अलग स्थितियों के लिए अलग–अलग नियम बताए जाते है। किन्तु यह नहीं बताया जाता है कि इन सबमें भाग की ही प्रक्रिया हो रही है।

ये स्थितियां इतनी अलग–अलग नजर आती हैं कि इनकी व्यापक सूत्रविधि नहीं हो सकती जो सभी स्थितियों में लागू हो सके। यदि हम उपरोक्त चार स्थितियों में भाग के अर्थ का विश्लेषण करें, तो पाएंगे कि यह अवधारणा के स्तर पर काफी उलझा हुआ है।

अभ्यास : आगे करने से पहले स्वयं इनके अर्थ का विश्लेषण करें व लिखें। विश्लेषण के लिए एक–दो उदाहरण ले लें।

स्थिति 1 : एक दशमलव भिन्न में पूर्णांक संख्या का भाग

जैसे– 0.2 ÷ 4 यहां 0.2 मतलब दो दसवें भाग हैं। यहां दो दसवें भागों को चार बराबर हिस्सों में बांटना है। मान लीजिए दो चॉकलेट बार हैं जो 10–10 टुकडों में बंटे हैं। बराबर–बराबर बांटना है। यहाँ प्रत्येक चॉकलेट बार 0.1 के बराबर है।

सबसे पहले चारों बच्चों को एक बार के दस हिस्सों में से एक–एक छोटा हिस्सा दिया। फिर उसी बार में से एक और टुकड़ा हर एक को दिया। अब इस बार में दो छोटे टुकड़े बचे। इन्हें और दूसरे बार में से 2 टुकड़े लेकर फिर सबको एक–एक टुकड़ा बांट दिया। इसी प्रकार से दूसरे बार के बाकी टूकड़े भी बांट दिए। अब बच्चे वे अपने–अपने टुकड़े गिने की प्रत्येक के पास पांच टुकड़े थे। यह पांच टुकड़े कितने के बराबर हैं?

यदि आप चाकलेट तुलना वर्गाकार ग्रिड (square grid) से करें, तो पाएंगे कि प्रत्येक चाकलेट वर्ग का दसवां भाग है और प्रत्येक छोटा टुकड़ा वर्ग का सौवां भाग है। अर्थात् दशमलव की भाषा में प्रत्येक बार 0.1 है ओर प्रत्येक छोटा टुकड़ा 0.01 है। तब 5 टुकड़ों का मतलब होगा 0.05। यानी प्रत्येक बच्चे को 0.05 मिला। इसलिए जब हम 2 दसवें भागों के 4 बराबर हिस्से करेंगे तो प्रत्येक हिस्सा 0.05 होगा। अतः हम लिखेंगे:

$0.2 \div 4 = \frac{0.2}{4} = 5$ सौवें भाग = 0.05 याने 20 सौवें भाग 4 बराबर–बराबर हिस्सों में।

स्थिति 2 : एक पूर्णांक संख्या में दशमलव भिन्न का भाग

$4 \div 0.2$ पता करने के लिए हम यह पूछ सकते हैं कि 4 में 'कितने 0.2' हैं। अर्थात् 4 में कितने 2 दसवें भाग हैं।

इस स्थिति में हम 1 में पूर्ण में 2 दसवें भाग के बराबर टुकड़े काटने को कह सकते हैं। हम यह काम रंग भरकर भी कर सकते हैं। रंग भरी इकाइयों (2 दसवें भाग) को सावधानीपूर्वक गिनने से पता चल जाता है कि 4 में 20 ऐसे भाग हैं जो 2 दसवें हैं।

एक व पूर्ण में दस, दसवें भाग हैं यानी इसमें 5 ऐसे भाग बनेंगे। हर एक में 5 ऐसे भाग हैं तो कुल मिलाकर 20 भाग होंगे। याने $4 \div 0.2 = \frac{4}{0.2} = 20$

स्थिति 3 : एक दशमलव भिन्न में दूसरी दशमलव भिन्न का भाग

यह समझना काफी बोझिल है कि 0.2 में कितने 0.4 होंगे। हम सीधे यह नहीं सोच सकते। 0.4 में कितने 0.2 हैं यह सोचना संभव है परन्तु इसका उलटा पता करना सरल नहीं है। 0.4 करने के लिए देखते हैं कि 0. 4 का दसवां भाग कितना होगा। 0.4 का दसवां भाग हैं, 0.04 या चार सौवें। इसके आधार पर हम 0.2 को नापेंगे। 0.2 में 20 सौवें भाग हैं। यह 5 चार–सौवें भाग हुए। अर्थात 5 (पांच), 0.04 हैं। अर्थात् इसमें 0.4 के पांच–दसवें भाग हैं। जाहिर है बच्चों के लिए यह समझना मुश्किल होगा। तो फिर क्या करें? चित्र बनाकर देखें और यह देखें कि बच्चे इसको कैसे समझ सकते हैं?

E14) एक तरीका सुझाइए जिससे बच्ची को निम्नलिखित बातें समझाई जा सके :

"किसी दशमलव संख्या में 10 का 100 अथवा 1000 आदि का भाग देते समय सिर्फ हम भाज्य के दशमलव बिन्दु को उतने स्थान बाईं ओर खिसका देते हैं, जितनी शून्य भाजक में हों" ऐसा क्यों करते हैं?

दशमलव भिन्नों का अनुमान

संख्याओं को समझने और महसूस करने का एक महत्वपूर्ण हिस्सा अनुमान है। इससे यह जांचने में तो मदद मिलती ही है कि किसी संक्रिया से प्राप्त परिणाम उचित है या नहीं। कई स्थितियां, जहां गणना करना सरल नहीं होता, में अनुमान लगाने से गणना में भी मदद मिलती है।

कुछ ऐसी स्थितियां जो बच्चों को दशमलव का अनुमान लगाने के लिए दी जा सकती हैं।

1) एक बच्ची नोटबुक खरीदने दुकान पर गई उसने देखा कि दुकानदार के पास एक 50 पेज की नोटबुक है जिसकी कीमत 3.50 रूपए है और एक 70 पेज की नोट बुक है जिसकी कीमत 4.75 रूपए है। दुकानदार ने पूछा, 'तुम्हें कौन–सी नोटबुक चाहिए ?'' बच्ची को कौन सी नोट बुक सस्ती पड़ेगी?

2) एक बच्ची को 100 रूपए का नोट देकर राशन की दुकान से शक्कर, दाल, आटा और चावल लाने को कहा गया। वह बच्ची यह अन्दाज कैसे लगाए कि उतने पैसे में कितना सामान आ जाएगा?

अनुमान लगाना सीखना :

यदि बच्चों से ऐसे सवाल मौखिक रूप से पूछे जाएं और उन्हें विधिवत गणना करने न दी जाए और जल्दी से जवाब देने को कहा जाए, तो वे अनुमान लगाएगे। शुरू में उनके अनुमान आपको अटपटे लग सकते हैं। ऐसे में उनकी मदद करें, जैसे– उत्तर 50 से कम है। धीरे–धीरे वे स्वयं से उचित सवाल पूछकर ज़्यादा अच्छे उत्तर दे पाएंगे।

सन्निकटन करना :

उदाहरण 3 : शिक्षक ने छात्रों को 5 टोलियों में बांट दिया। प्रत्येक टोली को उन्होंने अलग–अलग लम्बाई के तार के टुकड़े दे दिए। प्रत्येक टोली को उन्होंने एक मापन फीता दिया और तार की लम्बाई पता करने को कहा। फीते पर सेमी. के निशान थे और उसके छोटे भाग नहीं किए गए थे।

शिक्षक : फीते से तार की लम्बाई नापकर बताओ।

टोली : 3 सेमी. व थोड़ी–सी ज्यादा।

शिक्षक : ठीक, पर कितनी ज्यादा? क्या यह 1 सेमी. या $\frac{1}{2}$ सेमी. ज्यादा है या $\frac{1}{2}$ सेमी. से कम है?

एक बच्ची : $\frac{1}{2}$ से कम है।

शिक्षक : तो तार की लम्बाई 3 सेमी. के करीब है। या 4 सेमी. के करीब है?

एक बच्ची : 3 सेमी. से करीब है।

शिक्षक : बढ़िया। तो हम कह सकते हैं कि तार की लगभग लम्बाई 3 सेमी. है, यदि दशमलव को छोड़ दें।

इसके बाद उन्होंने यही गतिविधि 6.85 लम्बाई के साथ दोहराई। उन्होंने देखा कि 6 सेमी. और ऊपर बहुत अधिक है। जब पूछा गया कि यह लम्बाई 6 सेमी. के करीब है या 7 सेमी. के करीब है। तो कुछ बच्चों ने जवाब दिया कि यह 7 सेमी. के करीब है, तब शिक्षक ने उन्हें समझाया कि इस मामले में लम्बाई लगभग 7 है।

सन्निकटन कैसे करें :

इस तरह से शिक्षक ने हर टोली के साथ काम किया और उन्हें यह सीखने में मदद की कि लम्बाई का निकटतम पूर्णांक तक सन्निकटन कैसे करते हैं। उन्होंने बच्चों को यह भी समझाया कि यह जरूरी नहीं

है कि सन्निकटन हमेशा एक संख्या और उसकी अगली संख्या के बीच ही किया जाए। हमें एक ऐसी संख्या चुननी होती है जो उस संख्या के करीब हो और गणना के हिसाब से सुविधाजनक हो। जैसे–

$$255 + 98.73$$

और बताया कि 98.73 तो 100 के करीब है और इसलिए जोड़ का एक अनुमान हम मन ही मन लगा सकते हैं कि यह 355 होगा। इसके बाद उन्होंने कई अभ्यास दिए जिनसे बच्चों को अनुमान का कौशल विकसित करने मे मदद मिली।

E15) दशमलव भिन्नों के सन्निकटन की बात बच्चों को समझाने के लिए एक गतिविधि बनाइए।

अनुमान व उत्तर की जांच :

इस प्रकार अनुमान का अभ्यास करवाने की गतिविधियों से दशमलव संख्या की अवधारणात्मक समझ पुख्ता करने में भी मदद मिलती है।

उदाहरण 4 : एक दिन मेरे पड़ोसी की 12 वर्षीय बेटी मीरा ये सवाल जंचवाने के लिए लाई :

	2.19
5.43	2.49
1.36	.99
2.09	.79
.79	1.43
.39	3.19
+ .48	+ .43

इन सवालों के उसके जवाब 85.4 और 7.61 थे। सवालों को देखते ही मैं समझ गई कि उसके जवाब गलत है।

मैं : संख्याओं को ज्यादा ध्यान से देखो। मुह जबानी हिसाब करके पता लगाते हैं कि तुम्हारे जवाब सही हैं या नहीं।

मीरा : पर आंटी, ये तो दशमलव संख्याएं हैं, बहुत कठिन हैं।

मैं : कोई बात नहीं। मैं प्रत्येक दशमलव संख्या के सामने अगली पूर्णांक संख्या लिख देती हूं। देखो

5.43 के लिए 6

1.36 के लिए 2

2.09 के लिए 3

0.79 के लिए 1

0.39 के लिए 1

0.48 के लिए 1

फिर पूर्णांक संख्याओं को जोड़ लेती हूं। तो 15 आया। इसका मतलब यह है कि जोड़ 15 से ज्यादा तो नहीं हो सकता। अब मान लो हम इन संख्याओं के दशमलव वाले हिस्से छोड़ दें, तो जोड़ कितना आएगा?

मीरा : 8 आएगा।

मैं : तो जोड़ इससे कम हो सकता है क्या?

मीरा : नहीं, क्योंकि हम तो इससे ज्यादा बड़ी संख्याएं जोड़ रहे हैं।

मैं : इसलिए तुम्हारा जवाब 8 से ज्यादा और 15 से कम होना चाहिए। अब अपने उत्तर की तुलना इससे करो।

मीरा : ओह, मेरा जवाब गलत है। मतलब मुझे फिर से करना पड़ेगा।

मैं : यानी मोटा–मोटा हिसाब करके हम यह पता लगा सकते हैं, कि कहीं हमारा जवाब गलत तो नहीं है।

मीरा : चलो, मैं दूसरे सवाल की जांच करती हूँ। इसमें भी जोड़ 8 और 15 के बीच होना चाहिए। यह भी गलत है। (उसने फिर से गणना करके सही कर लिया। वह बहुत खुश थी।)

हमने ऊपर के उदाहरण में देखा कि जोड़, गुणा और भाग के सवाल हल करने में मददगार होते हैं। हमें कोशिश करनी चाहिए कि बच्चे यह भी समझ पाएं कि सन्निकटन का मकसद संख्याओं को सरल बनाना तथा मन ही मन गणना के योग्य बनाना है। हमें चाहिए कि उन्हें काफी अभ्यास करवाएं ताकि सन्निकटन की विधि को लेकर वे लचीले हो जाएं और इसे क्रिया–विशेष के अनुरूप ढाल सकें। इस अनुभव से यह समझ पुख्ता होगी कि सन्निकटन वाकई सरलीकरण की प्रक्रिया है।

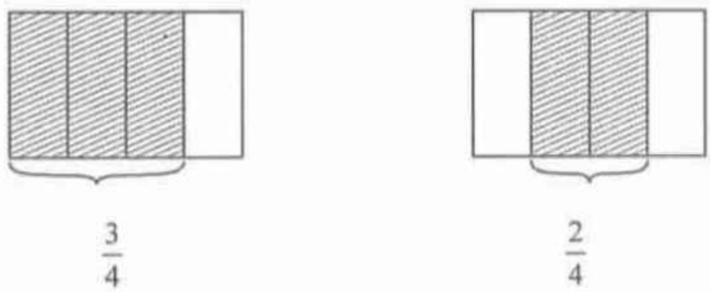
- पूर्णांक संख्याओं के ज्ञान को दशमलव भिन्नों पर लागू करते समय बच्चों की समस्याओं को देखा।
- दशमलव पद्धति की समझ को बेहतर बनाने के कुछ तरीके।
- बच्चों को दशमलव भिन्नों से संबंधित सूत्रविधियां बताने से पहले अवधारणा के विकास का महत्त्व।
- बच्चों में भिन्नों के साथ अनुमान लगाने की क्षमता का विकास करने के तरीके।

इकाई 2 के पाठ 4, 5, 6 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

पाठ 4 : भिन्न की संक्रियाएँ

E1 समान भिन्नों का जोड़ सिखाने के लिए कागज मोड़ने की गतिविधि काफी कारगर होती है। परन्तु आसमान भिन्नों की जोड़ के लिए इस गतिविधि से समझाना मुश्किल होता है। उदाहरण के लिए यदि हमें $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}$ दिखाना है तो $\frac{1}{8}$ दिखाने के लिए कागज को आठ बराबर भागों में मोड़ना होगा और $\frac{1}{3}$ दिखाने के लिए तीन बराबर भागों में मोड़ना होगा। एक ही कागज पर $\frac{1}{8}$ व $\frac{1}{3}$ दर्शाना मुश्किल है। अगर हम $\frac{1}{8}$ व $\frac{1}{3}$ को दिखाने के लिए अलग–अलग कागज का उपयोग करें तो हो सकता है कि बच्चे व समझ पायें कि इस स्थिति में पूर्ण क्या होगा?

अब आप $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ के लिए पहले $\frac{3}{4}$ चित्रात्मक रूप में दर्शाएं फिर $\frac{1}{4}$ को हटाएं (मिटा दें) तो आपको $\frac{3}{4}$ प्राप्त होगा।



चित्र $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$

E2 आप कक्षा में बच्चों को समूह में बाँटे। प्रत्येक समूह को पट्टियाँ, रंगीन, पेंसिलें, डबलरोटी के टुकड़े आदि दे सकते हैं।

एक समूह को एक डबल रोटी दे दीजिए। अब बच्चों में रोटी का $\frac{1}{4}$ वां हिस्सा दें। अब उनसे बातचीत के जरिए यह कहलवाएं कि उन्हें कैसे पता चला कि वह $\frac{1}{4}$ डबलरोटी है।

उन्हें समझाइए कि $\frac{1}{4}$ डबल रोटी प्राप्त करने के लिए जरूरी है कि पहले उसे 4 बराबर भागों में बांटा जाए और फिर उनमें से एक भाग लिया जाए। इसी तरीके से $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ पता करने को भी कहिए। इसे विभिन्न वस्तुओं के साथ भी करके देखें।

आप अलग–अलग समूह को अलग–अलग सवाल भी दे सकते हैं। बाद में एक समूह से एक प्रतिनिधि बुलाकर कहिए कि उन्होंने जो कुछ किया है, उसे समझाइए।

E4 असमान भिन्न को जोड़ सिखाने में अंश चार्ट पर आधारित गतिविधियाँ काफी उपयोगी होती हैं। खास तौर पर एक समान 'पूरा' खोजने की बात इस चार्ट के आधार पर आसानी से समझाई जा सकती है। शुरुआत में शायद यह गतिविधि बच्चों को थोड़ी मुश्किल व उबाऊ लगे। जैसे–जैसे वे इस चार्ट का उपयोग सीखते जाते हैं। वैसे–वैसे उन्हें गतिविधियों में रुचि आने लगती है। इस गतिविधि का लाभ यह है कि इससे भिन्न से जुड़ी हुई अन्य अवधारणाएँ भी सिखाई जा सकती हैं। आप इस गतिविधि का इस्तेमाल अपनी कक्षा में कीजिए व उपयोगिता बताइए।

E5 दोनों ही सवालों में बच्चों ने घटाने का जो नियम लगाया है, वह है $\frac{a}{b}-\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b--d}$

यहाँ पहले सवाल में बच्चों ने यह भी ध्यान नहीं दिया है कि 0 भाग नहीं दिया जा सकता। दूसरे सवाल में उन्होंने 3–5 की गणना में भी गलती की है। बच्चों ने दोनों ही सवालों में एक से अधिक गलतियाँ की हैं और नियम भी गलत लागू किए हैं। उन्होंने अपने ही ढंग का नियम लगाते हुए गलती कर दी है।

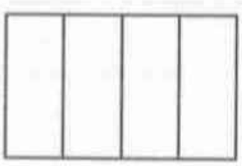
इन गलतियों की एक वजह तो यह हो सकती है कि उनके शिक्षक ने भिन्नों का घटाना सिखाने में पर्याप्त समय नहीं लगाया। शिक्षक ने मान लिया कि जब बच्चों को जोड़ आता है तो घटाना भी उसी तरह से कर लेंगे।

E6 आपने देखा होगा कि बच्चों को पूर्णांक संख्या या भिन्न संख्याओं की क्रियाएँ सिखाते वक्त आमतौर पर इसी बात पर ध्यान दिया जाता है कि बच्चे नियम याद कर लें। परन्तु इस तरह के नियमों की भाषा न समझ पाने के कारण कई रागरयाएँ उभरती हैं।

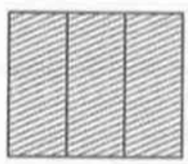
जैसे जब आप बच्चों से कहते हैं कि $\frac{3}{2}$ में से $\frac{2}{3}$ घटाओ तो आप मानकर चलते हैं कि वह 'घटाओ' का अर्थ समझते हैं और यह भी समझते हैं कि 'में से' का क्या अर्थ होता है। लेकिन बच्चों को इन शब्दों का मतलब समझने के लिए काफी अभ्यास की जरूरत होती है।

E9 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ का अर्थ बताने व हल निकालने के लिए कागज मोड़ने की गतिविधि का इस्तेमाल किया जा सकता है।

कागज की दो पट्टियाँ लीजिए। एक पट्टी को 4 बराबर भागों में बाँटकर इसमें से 3 भाग काट लीजिए।



(क) $\frac{3}{4}$



(ख)

(क) '1' कागज को चार भागों में बाँटना।

(ख) 1 का $\frac{3}{4}$ दिखाना।

अब $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ यानी $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{3}$ निकालने के लिए हमें कटे हुए हिस्से का $\frac{2}{3}$ ज्ञात करना होगा। इसके लिए हम कटे हुए भाग को 3 बराबर भागों में मोड़ लेंगे और इसमें से 2 भाग काट लेंगे।

E10 अगर बच्ची को 'दो और एक बटा दो' का अर्थ मालूम हो न वे और इसे दर्शाने के तरीके को लेकर भ्रमित हो। यदि समस्या मात्र संकेत की हो, तो उसे इसमें उपयोग के काफी अभ्यास की जरूरत है।

लेकिन यदि बच्ची को 'दो सही एक बटा दो' का अर्थ ही समझ नहीं आया है तो जरूरी होगा कि कई गतिविधियों के जरिये उसे यह समझने में मदद की जाए। इसके लिए आप बच्चों को दो पूरी वस्तुओं व एक आधी वस्तु दे सकते हैं।

$2\frac{1}{2}$ व $2\times\frac{1}{2}$ में अन्तर समझाने के लिए आप बच्ची को कुछ पन्ने दें और उससे कहें कि वह आपको पहले $2\frac{1}{2}$ पन्ने दे और फिर $2\times\frac{1}{2}$ पन्ने दे। इससे आपको बच्ची की समझ का पता चल सकेगा।

पाठ 5 : भिन्नों में सूत्रविधि पर चर्चा

E2 नहीं। मसलन $\frac{a}{b}$ की तुल्य भिन्न पता करने की सूत्रविधि निम्नलिखित है।

$\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$ जहाँ c, o के अलावा कोई भी पूर्णांक संख्या हो सकती है।

E3 199 × 5 पर गौर कीजिए। यदि हम अवधारणात्क ज्ञान का उपयोग करें कि 199 = 200 - 1 तो उत्तर 995 निकालना आसान है। यदि गुणा की विधि से चलेंगे तो ज्यादा मुश्किल होगा।

E4 (1) प्रक्रिया में बहुत मेहनत लग सकती है।
(2) हो सकता है कि बच्ची अपनी गलतियाँ न पकड़ पाए।
(3) बच्ची की रूचि खत्म हो सकती है।
(4) हो सकता है कि बच्ची संबंधित अवधारणाओं और प्रक्रियाओं के बीच का संबंध ही न देख पाए।

E6 हाँ। उदाहरण के लिए यदि 50 को इस रूप में दर्शाना है तो हम 2 की उस सबसे बड़ी घात को लेंगे जो 50 को बांट सके। यह है $32 = 2^5$। अब बचा 18 और 18 को बांटने वाली 2 की सबसे बड़ी घात है $16 = 2^4$। बचा $2 = 2^1$ तो $50 = 32 + 16 + 2$

E7 संख्याओं को जोड़ने की क्षमता और यह तथ्य जोड़ पर गुणा का विकलन होता है यानी $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

E8 जवाब II में उसने अंश की संख्या प्राप्त करने के लिए समान भिन्नों से संबंधित विधि का उपयोग किया। किन्तु हर के मामले में उसने असमान भिन्नों की विधि लागू कर दी। इसी प्रकार से आप उत्तर 1 का विश्लेषण कर सकते हैं।

E10 मान लीजिए आप $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}$ दर्शाना चाहते हैं। बड़े चौकोर दो ग्राफ कागज लीजिए। प्रत्येक कागज पर एक ही साइज के बड़े–बड़े वर्ग बनाइए। अब उनसे कहिए कि एक वर्ग में $\frac{1}{8}$ भाग तथा दूसरे में $\frac{1}{12}$ भाग में रंग भरें।

अब उनसे कहिए कि एक छोटा वर्गाकार टुकड़ा लें, जिसकी मदद से वे इन दोनों क्षेत्रों को नाप सकें। मान लीजिए व $\frac{1}{24}$ लाते हैं। तो उनसे पूछिए कि उन्होंने $\frac{1}{8}$ को $\frac{1}{24}$ से कैसे नापा। इसके लिए $\frac{1}{24}$ का क्षेत्रफल $\frac{1}{8}$ पर चिपकाया जा सकता है। इससे $\frac{3}{24}$ मिलेगा।

इसी प्रकार से वे यह देख सकते हैं कि $\frac{1}{12}$ का क्षेत्रफल $\frac{1}{24}$ के क्षेत्रफल से दो गुना है यानी $\frac{1}{12}$ और $\frac{2}{24}$ तुल्य हैं। अब उनसे $\frac{3}{24}-\frac{1}{12}$ पता करने को कहिए। यह $\frac{1}{24}$ है। अर्थात् $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{3}{24}-\frac{2}{24}=\frac{1}{24}$।

इसी तरह से वे $\frac{1}{48}$ वगैरह भी आजमा सकते हैं।

पाठ 6 : दशमलव स्वरूप में व्यक्त भिन्नों पर चर्चा

E2 बच्चों के पास पूर्णांक संख्याओं के स्थानीय मान की अच्छी समझ और भिन्नों का अच्छा अभ्यास होना चाहिए। इससे दसवें भाग और सौवें भाग की समझ के विकास में मदद मिल सकती है।

E14 (1) हम भाग उसी तरह करते हैं जैसे पूर्णांक संख्याओं का भाग करते हैं (दशमलव को अनदेखा करके)

(2) हम सबसे पहले भाज्य के पूर्णांक वाले हिस्से में भाग करते हैं। इसके बाद हम भागफल के इकाई वाले अंक के दाईं ओर दशमलव बिन्दु लगा देते हैं और फिर भाज्य के दशमलव हिस्से को भाग देते हैं।

(3) यदि भाज्य का पूर्णांक वाला हिस्सा शून्य है तो हम भागफल में इकाई के स्थान पर शून्य लिखते हैं। फिर हम भागफल की इस शून्य के दाईं ओर दशमलव बिन्दु लगाते हैं और दशमलव बिन्दु के दाईं ओर हम भाज्य के प्रत्येक अंक के लिए तब तक एक–एक शून्य लगाते हैं जब तक कि वे अंक मिलकर भाजक से बड़ी संख्या न बन जाए।

(4) यदि भाज्य का पूर्णांक वाला हिस्सा भाजक से छोटा है तो हम भागफल के इकाई वाले स्थान पर शून्य लिखकर शुरूआत करते हैं। फिर भाज्य के पूर्णांक वाले हिस्से के अंक और दशमलव हिस्से का पहला अंक मिलकर जो संख्या बनाते हैं वह भाजक से छोटी है तो भागफल में दशमलव के बाद एक शून्य लगाते हैं। यदि भाज्य के पूर्णांक वाले हिस्से और दशमलव के बाद के 2 अंक मिलकर बनी संख्या भी भाजक से छोटी है तो हम एक की बजाए दो शून्य लगाते हैं वगैरह।

(5) यदि अन्तिम शेष शून्य नहीं है तो भाजक के दाईं ओर इतने शून्य लगाते हैं कि अन्तिम शेष शून्य हो जाए।

इकाई – 3
मापन

पाठ – 7 मापन की समझ

लम्बाई का मापन – क्षेत्रफल

आयतन

आयतन की समझ – आयतन व आयतन का संरक्षण – धारिता बनाम आयतन

पाठ – 8 समय का मापन

कल, आज और कल – अन्तराल बनाम एक क्षण – गणितीय क्रियाओं से संबंधित दिक्कतें

इस सबक में हम मापन व समय की समझ पर बात करेंगे। यह सीखने का प्रयास करेंगे कि मापन दो व तीन विमीय हो सकता है जिसे क्षेत्रफल व आयतन के माध्यम से बताया जाता है। समय पर आधारित अवधारणाओं को सरल उदाहरणों की सहायता से जानने का प्रयास करेंगे।

पाठ – 7
मापन की समझ

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- लम्बाई का मापन
- क्षेत्रफल
- आयतन
  - आयतन की समझ
  - आयतन का संरक्षण
- सारांश

परिचय

मापन एक ऐसा हुनर है जो हर व्यक्ति के जीवन में जरूरी है। हमें कुछ न कुछ नापना ही पड़ता है, जैसे कुएँ से पानी निकालने के लिए रस्सी का नाप, कमरे में खिड़की बनाने के लिए खिड़की का नाप, कमरे में अलमारी बनवाने के लिए नाप, वगैरह। इन सभी कामों में हमें मापन के हुनर की आवश्यकता पड़ती हैं।

मापने के लिए अधिकतर हम अन्दाजे से काम चला लेते हैं। जैसे यदि हमें कुएँ से पानी निकालने के लिए रस्सी खरीदनी होती है तो हम एक अन्दाजे से उसका माप बता देते हैं। जैसे– हम दुकान पर जा कर कह देते हैं कि 12 हाथ रस्सी देना। अपने घर के टेबल के लिए कपड़ा लाते वक्त भी हमें कभी टेबल को नापने की आवश्यकता महसूस नहीं होती। हम वहाँ अपने टेबल के माप व कपड़े के माप की अन्दाजे से तुलना करके कपड़ा खरीद लेते हैं परन्तु जब केवल गुणात्मक विवरण से काम न चले तो हम किसी वस्तु के माप को दर्शाने के लिए उसे एक संख्या दे देते हैं। जैसे, लम्बाई को दर्शाने के लिए '10 मीटर' जैसी संख्या से दर्शाते या मापते हैं।

मापन का अर्थ होता है कि किसी वस्तु के गुण को मात्रात्मक रूप में पता लगाना या व्यक्त करना। बच्चों को मापन की कई प्रणालियाँ सीखनी पड़ती हैं।

पिछले वर्ष आपने मापन के विभिन्न चरणों के बारे में जाना था। इस पाठ में हमने खास तौर से कक्षा में मापन सीखते व पढ़ाते वक्त होने वाली गलतियों पर ध्यान दिया है। इस संदर्भ में देखा गया है कि अधिकांश बच्चे, परिमाप, क्षेत्रफल, आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल के बीच भेद नहीं कर पाते। बच्चे किसी रटे–रटाये सूत्र का उपयोग करके किसी ज्यामितीय आकृति का क्षेत्रफल भले ही निकाल लेते हैं, परन्तु उन्हें यह नहीं पता होता कि उन्होंने वास्तव में किस वस्तु का परिकलन किया है। वह यह नहीं समझ/समझा सकते कि एक वर्ग के क्षेत्रफल या किसी डिब्बे के आयतन का अर्थ क्या है। नतीजा यह होता है कि वह अपने ज्ञान का इस्तेमाल किसी नई परिस्थिति में करने में असमर्थ रहते हैं।

उद्देश्य

- रोज़मर्रा की स्थितियों को मापन की अवधारणाओं से जोड़ पाएंगे।
- बच्चों को लम्बाई, परिमाप, क्षेत्रफल, पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन की अवधारणाओं से परिचित कराने के लिए उपयुक्त विधि विकसित कर पाएं।
- अपने विद्यार्थियों की मापन की समझ का आकलन कर पाएं।
- बच्चों के सूत्रों को रटकर प्रयोग करने के बजाए समझ के साथ प्रयोग कर पाने में मदद पायेंगे।
- अपनी शिक्षण–विधि के प्रभाव का आकलन कर पाएंगे।

लम्बाई का मापन

हम हमेशा मानक इकाईयों का इस्तेमाल नहीं करते। कई बार हम वस्तुओं को गैर मानक इकाईयों से माप कर भी काम चला लेते हैं, जैसे– कई बार हम बित्ते या कदमों से भी माप कर काम चला लेते हैं। कई बार हम वस्तुओं को अन्दाजे से भी मापकर संतुष्ट हो जाते हैं। मानक इकाईयों का प्रयोग किया जाए या न किया जाए, यह निर्भर करता है कि आपको किसी काम में कितनी सटीकता की आवश्यकता है। जैसे यदि कोई आपसे किसी पास की दुकान तक की दूरी पूछे तो हम कह देते हैं कि बस यही 100 कदम की दूरी पर। इस दूरी को बताने में हमें सटीकता की आवश्यकता नहीं होती पर यह पता चल जाता है कि वह दुकान बहुत अधिक दूर नहीं होगी। और यदि यहीं पर किसी दर्जी को एक कमीज सिलनी हो तो वह अन्दाजे से काम नहीं चला सकता। उसे एक सटीक नाप की आवश्यकता पड़ेगी।

बच्चे भी मापन की गैर–मानक भौतिक इकाईयों का इस्तेमाल करते हैं जैसे, गिल्ली–डण्डे के खेल में वे डण्डे से अपनी मारी हुई गिल्ली की दूरी मापते हैं ताकि यह पता लगा सकें कि किसने गिल्ली कितनी दूर पहुँचाई। ये गैर–मानक इकाईयाँ भौतिक होती हैं क्योंकि इन्हें देखा, छुआ व गिना जा सकता है। कुछ ऐसी भौतिक इकाईयाँ भी हैं जो हर बच्चे की निजी होती हैं, जैसे बित्ता, कदम, वगैरह। बच्चों को इन इकाईयों से मापने का अभ्यास दिया जाना चाहिए।

E1 गैर मानक इकाईयाँ मापन में किस प्रकार मदद करती हैं? उदाहरण से समझाइए।

निजी इकाईयों का नाप सभी का अलग–अलग होता है जैसे सभी के बित्ते का अपना एक माप होता है और यदि सभी के माप अलग होंगे तो किसी भी वस्तु का ठीक नाप बता पाना बहुत मुश्किल होगा। इसलिए हमें जरूरत पड़ती है मापन की मानक इकाईयों की जो सर्वमान्य हो। जैसे कि लम्बाई मापने के लिए हम 'मीटर' का प्रयोग करते हैं, जो पूरी दुनिया में मान्य है। पर जो वस्तुऑं मीटर से छोटी होती हैं उन्हें हम सेन्टीमीटर में नापते हैं। (यह भी सर्वमान्य मानक इकाई है।)।

E2 मापन के लिए सर्वमान्य मानक इकाई की आवश्यकता है। बच्चे इस बात को समझ पाएं, इसके लिए आप कुछ गतिविधियाँ सुझाइए।

नाप का अनुमान लगाना–

रशमी चौथी कक्षा में पढ़ती है। उसे स्केल का इस्तेमाल कर छोटा रेखाखण्ड खींचना आता है। मैंने उसे 100 सेमी. वाला स्केल देकर पूछा कि उसकी किताब को नाप कर बताए। उसने नाप कर मुझे बताया कि मेरी किताब 67 सेमी. लम्बी है परन्तु किताब तो लगभग 30 सेमी. लम्बी ही दिख रही थी। ऐसा लगता है कि रशमी ने स्केल उल्टा पकड़ कर किताब को नाप दिया था।

बच्चों को मापन की इकाईयों का प्रयोग कर आसपास की वस्तुओं को मापने का अभ्यास देना चाहिए ताकि वे इन मानक इकाईयों का प्रयोग कर किसी वस्तु का निकटतम माप पता कर सकें। जैसे कि यदि रश्मी को सेमी. इकाई में नापने का अन्दाजा होता तो वह यह अनुमान से पता लगा सकती थी कि किताब की लम्बाई लगभग 30 सेमी. होनी चाहिए। यदि उसे इस बात का अनुमान होता तो वह अपने उत्तर की जाँच कर सही माप पता लगा सकती थी।

आसपास की वस्तुओं मापने से बच्चे मानक इकाईयों के माप का अन्दाजा लगाना सीख जाते हैं। जब वे अपने आसपास की वस्तुओं मापते हैं तो वे मापन की इकाईयों का प्रयोग कर निकटतम माप भी बता पाते हैं। जैसे कि वह यह समझ पाएंगे कि यदि कक्षा के दरवाजे की ऊँचाई 3.55 कही जाए तो वह मीटर में होगी, सेन्टीमीटर में नहीं।

इसके लिए हम बच्चों को मीटर पट्टी के बारे में बता सकते हैं जो कपड़े बेचने वाले कपड़ा मापने के काम में उपयोग में लाते हैं। हो सकता है कि बच्चे ऐसी पट्टी से परिचित भी हों।

हम बच्चों के साथ मिलकर एक मीटर की रस्सी बनाते हैं जिससे वे आस–पास उपस्थित वस्तुओं को नाप सकें। जैसे– कक्षा में रखा टेबल, ब्लैकबोर्ड, फर्श की लम्बाई व चौड़ाई इत्यादि। इस तरह से वस्तुओं मापने पर बच्चों को इन इकाईयों का अन्दाजा लगाना आसान हो जाता है।

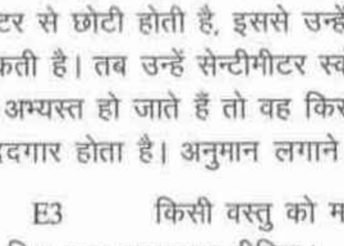
जब बच्चे एक मीटर लम्बाई को पहचानने लगे तब उन्हें उन वस्तुओं को मापने को कहा जाए जो कि एक मीटर से छोटी होती है, इससे उन्हें सेन्टीमीटर (मापन की उप–इकाई) जैसी इकाई की आवश्यकता महसूस हो सकती है। तब उन्हें सेन्टीमीटर स्केल के इस्तेमाल के लिए प्रेरित किया जा सकता है। जब बच्चे इन इकाईयों के अभ्यस्त हो जाते हैं तो वह किसी भी वस्तु का निकटतम नाप बता पाते हैं। अनुमान लगाना मापन में काफी मददगार होता है। अनुमान लगाने से हम नाप की सटीकता की जाँच भी कर पाते हैं।

E3 किसी वस्तु को मापते वक्त अनुमान लगाने का कौशल सहायता करता है। इस बात की पुष्टि के लिए कुछ उदाहरण दीजिए।

E4 बच्चों में अनुमान लगाने के कौशल को विकसित करने के लिए कुछ तरीके सुझाइए।

क्षेत्रफल

एक बार कक्षा 5 में पढ़ने वाली मेरी भतीजी सीमा अपनी कॉपी में गृह कार्य कर रही थी। उसके अध्यापक ने उसे मापन से सम्बन्धित कुछ सूत्र लिखवाए थे। वह उन्हीं की मदद से अपने सवाल हल कर रही थी। वह दिए गए आयत का क्षेत्रफल व परिमाप के सूत्र लगाकर निकाल रही थी। मेरी बहन ने मुझे उसका काम जाँचने को कहा। मैं सीमा के पास जाकर बैठ गई व उसके हल किए हुए सवाल देखने लगी। उसने एक सवाल इस तरह हल किया हुआ था–



परिमाप = 2 (ल. + चौ.)

= 2 (7 + 3)

= 20 सेमी.

क्षेत्रफल = ल. × चौ.

7 × 3 = 21 वर्ग सेमी.

इस सवाल को देखकर मुझे लगा कि सीमा केवल सूत्र का इस्तेमाल कर सवाल हल कर रही है परन्तु वह क्षेत्रफल व परिमाप का अर्थ नहीं समझ पायी है। अब मैंने सीमा से कुछ बात की।

मैं : क्षेत्रफल क्या होता है?

रीगा : आँ..... 2 (ल. + चौ.), नहीं शायद यह तो परिमाप होता है। ल. चौ. या....... आँ.... मुझे याद नहीं।

सीमा ने अपनी कॉपी देखी व अपने अध्यापक द्वारा लिखवाया हुआ सूत्र मुझे बता दिया।

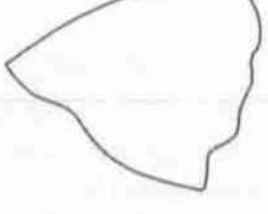
यह बात तो साफ पता चल रही थी कि सीमा के लिए क्षेत्रफल व परिमाप का मतलब केवल एक सूत्र था जिसको वह अभी तक याद नहीं कर पाई थी।

कक्षा में हम अक्सर बच्चों को सूत्रों का उपयोग करके माप निकालना बताते हैं। ढेर सारे सूत्र बच्चों को याद करवाए (रटवाए) जाते हैं व उनका इस्तेमाल कर पुस्तक में दिए गए सवाल हल करवा दिए जाते हैं। इस प्रक्रिया में बच्चे सूत्र रट तो लेते हैं पर वह यह नहीं समझ पाते कि सूत्र को इस्तेमाल कब किया जाए। कई बार तो बच्चे दो–तीन सूत्रों में भ्रमित (Confuse) भी हो जाते हैं, जिसके कारण वह पूरा सूत्र ही गलत लिख बैठते हैं। इसका कारण यह होता है कि बच्चे मापन में प्रयोग होने वाली शब्दावली जैसे– क्षेत्रफल, परिमाप, पृष्ठीय क्षेत्रफल, आयतन, धारिता आदि शब्दों का अर्थ समझ नहीं पाते हैं।

सूत्र रटवाने से पहले, हमें बच्चों को इन शब्दों से परिचित करवाना जरूरी है। इन शब्दों से परिचित करवाते समय हमें कुछ और बातों का ध्यान रखना होगा, जैसे इन सभी का आपस में संबंध व इनका अंतर।

जैसे सीमा भी दो विमिय आकृति आयत के परिमाप व क्षेत्रफल में भ्रमित (Confuse) हो गई थी। इसका कारण यह हो सकता है कि उसे क्षेत्रफल व परिमाप का अर्थ नहीं पता पर उनमें कुछ बातें समान दिख रही थीं, जैसे– दोनों सूत्रों में 'लम्बाई' व 'चौड़ाई' का प्रयोग दिख रहा था। इसलिए हमें यह भी कह सकते हैं कि वह सूत्रों में उलझ गई थी।

क्षेत्रफल. किसी भी आकृति का दो विमीय फैलाव होता है। किसी आकृति या वस्तु के तल जितनी जगह घेरती है वह उस वस्तु का क्षेत्रफल होता है।



यह आकृति जितना कागज घेरती है वह इसका क्षेत्रफल है।

किसी वस्तु के कोई तल द्वारा घेरी गई जगह को जब हम मात्रात्मक रूप में व्यक्त करते हैं तो हमें सबसे पहले आवश्यकता पड़ती है एक इकाई की। जब हम किन्हीं आकृतियों या वस्तुओं का क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं तो हम उसे किसी इकाई से मापते हैं, यह इकाई मानक व गैर मानक कोई भी हो सकती है।

यदि हमें केवल किन्हीं दो वस्तुओं के क्षेत्रफल की तुलना करनी हो तो हम गैर–मानक इकाईयों का इस्तेमाल भी कर सकते हैं। जैसे– दोनों वस्तुओं के क्षेत्रफल को डाक टिकट या माचिस की खाली डिब्बियों से ढक कर देखने और यह पता लगाना कि कौन बड़ा और कौन छोटा है।

परन्तु यदि यहाँ पर किसी दूर बैठे व्यक्ति को किसी जगह के क्षेत्रफल के बारे में बताना हो तो हमें क्षेत्रफल मापने की एक सर्वमान्य इकाई (जो सबके लिए सटीक हो) की आवश्यकता होगी। हमें क्षेत्रफल मापने की भी

एक ऐसी मानक इकाई चाहिए होगी जो पूरी दुनिया में सर्वमान्य हो। यह इकाई 1 वर्ग कि.मी. या 1 वर्ग मीटर या 1 वर्ग सेन्टीमीटर है।

यदि बच्चे लम्बाई मापने की इकाई सेन्टीमीटर से परिचित हैं तो उन्हें वर्ग सेन्टीमीटर को इस्तेमाल करने में कोई दिक्कत नहीं आएगी।

अगर बच्चों के पास क्षेत्रफल मापन की गैर मानक इकाईयों से मापने का अनुभव है तो आप उन्हें 1 सेमी. भुजा वाले वर्गों को आकृतियों पर जमा कर उनका क्षेत्रफल निकलवा सकते हैं। धीरे–धीरे बच्चों को आकृतियों को देखकर अन्दाजा लगा कर इस बात का उत्तर देने में वक्त नहीं लगेगा कि किसी आकृति का क्षेत्रफल कितना होगा। यदि बच्चे एक बार इस बात को समझ जाएं तो उन्हें क्षेत्रफल के सूत्र से परिचित करवाना व उसका इस्तेमाल करना बहुत मुश्किल नहीं होगा।

मोहन ने अपनी कक्षा में बच्चों को 1 सेमी. वर्ग जमाकर आकृतियों के क्षेत्रफल पता लगवाए। बच्चे इस प्रकार से क्षेत्रफल निकालने से काफी आकृतियों के क्षेत्रफल का अन्दाजा भी लगाने लगे थे। अब मोहन उन्हें क्षेत्रफल के सूत्र बताना चाहता था। उसने बच्चों को एक आयताकार आकृति दिखाई व पूछा–

मोहन : इस आकृति का क्षेत्रफल कितना होगा?

एक बच्चा : इसमें लगभग 25 वर्ग आ सकते हैं तो 25 वर्ग से.मी.।

दूसरा बच्चा : नहीं कुछ कम होने चाहिए। लगभग 20 वर्ग से.मी.

तीसरा बच्चा : सही उत्तर जाँचने के लिए हम इसमें 1 सेमी. के वर्ग बनाकर देख सकते हैं।

6 सेमी.

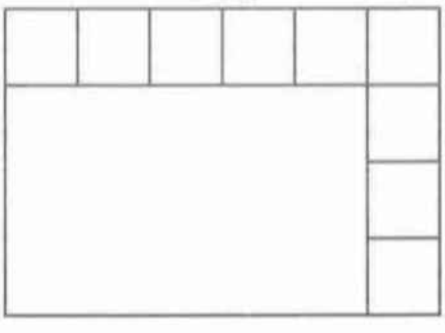
4 सेमी.

मोहन ने आकृति में वर्ग बनाने शुरू किए। मोहन ने इस तरह से आकृति में वर्ग बनाए।

मोहन : क्या अब सही क्षेत्रफल पता लगाया जा सकता है?

बच्चा : अँ.... हाँ, इसमें 24 वर्ग आ सकते हैं।

6 सेमी.



4 सेमी.

मोहन : शाबाश। तुमने यह कैसे बताया?

बच्चा : इसकी लम्बाई में 6 वर्ग हैं और चौड़ाई में 4 वर्ग हैं। तो जब मैं ऐसे ही 6 वर्गों को इस आकृति में 4 बार लगाऊँगा तो पूरा आयत 24 वर्ग सेमी. से ढक जाएगा।

मोहन : इस आकृति की लम्बाई कितनी है?

बच्चे : 6 सेमी.

मोहन : अच्छा! तो अब 6 सेमी. की लम्बाई में 1 सेमी. भुजा वाले कितने वर्ग लगाए जा सकते हैं?

बच्चा : अँ.... 6 वर्ग।

मोहन : हाँ, बिल्कुल ठीक।

और अगर ऐसे 6 वर्ग की कितनी पंक्तियाँ 4 सेमी. की चौड़ाई की इस आकृति में जमाई जा सकती है?

बच्चा : 4 पंक्तियाँ।

मोहन : तो कुल कितने वर्ग इस आकृति में जमाए जा सकते हैं?

बच्चे : 4 बार 6 वर्ग, यानी अँ.... 24 वर्ग।

मोहन : 4 बार 6 वर्ग का मतलब (4 × 6) वर्ग।

24 वर्ग सेमी. जो कि इसका क्षेत्रफल भी होगा।

मोहन ने बच्चों को ऐसे ही कुछ और आयतों का क्षेत्रफल पता लगाने को दिए। धीरे–धीरे बच्चे यह समझ गए कि जितनी आयत के भुजा की लम्बाई हो उतने वर्ग, जितनी चौड़ाई हो उतनी बार लगाएं तो आकृति को वर्ग पूरा ढक लेंगे और वर्गों की यह संख्या उस आयत का क्षेत्रफल होगा।

फिर मोहन ने बच्चों को इन सभी उदाहरणों की मदद से क्षेत्रफल पता लगाने का सूत्र बनवाया। बच्चों ने यह देखा कि जब भी वह आयत की लम्बाई को चौड़ाई से गुणा करते थे तो उनका क्षेत्रफल मिल जाता था। तो उन्होंने इसको सामान्यीकृत किया।

आयत का क्षेत्रफल = ल. × चौ.

क्योंकि क्षेत्रफल को मापा 1 सेमी. के वर्गों से जा रहा है तो क्षेत्रफल मापने की इकाई होगी वर्ग सेमी.।

E5) आप बच्चों को वर्ग व त्रिभुज के क्षेत्रफल की समझ विकसित करते हुए सूत्र तक कैसे पहुँचाएँगे? उदाहरण द्वारा समझाइए।

E6) अगर क्षेत्रफल मापने की इकाई 1 सेमी. भुजा वाले वर्ग की जगह 1 सेमी. भुजा वाले समबाहू त्रिभुज हो, तो आयत के क्षेत्रफल का सूत्र क्या होगा? ज्ञात कीजिए।

यदि हमें किसी टेबल के चारों ओर रिबन लगाना हो तो हमें कितना लम्बा रिबन चाहिए होगा? क्या यह माप टेबल के ऊपर लगाने वाली लकड़ी के माप से अलग होगा?

हाँ, क्योंकि जब मुझे टेबल के चारों ओर लगाने को रिबन चाहिए तो मुझे केवल टेबल के चारों ओर के माप को मिला के उसी लम्बाई का एक रिबन चाहिए होगा। पर जब मुझे उस पर लगी लकड़ी को मापना होगा तो मेरा काम केवल 1 माप (यानी लम्बाई) से नहीं चलेगा। मुझे उसके क्षेत्रफल को मापना पड़ेगा। (दो माप, लम्बाई व चौड़ाई)

यही अन्तर परिमाप व क्षेत्रफल में भी है। जब हम किसी समतल बन्द आकृति के किनारों को मापते हैं तो वह परिमाप होगा पर यदि हमें उस आकृति के तल को मापना है तो वह उसका क्षेत्रफल होगा।

परिमाप किसी भी दो विमिय आकृति के किनारों को एक विमीय में मापना है जबकि क्षेत्रफल, दो विमाओं में माप है। अब यदि किसी आयत के परिमाप के बारे में सोचें तो वह कुछ इस प्रकार होगा।

परिमाप = चारों भुजाओं का जोड़

= ल. + चौ. + ल. + चौ.

चूंकि आयत की आमने–सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं तो सूत्र होगा–

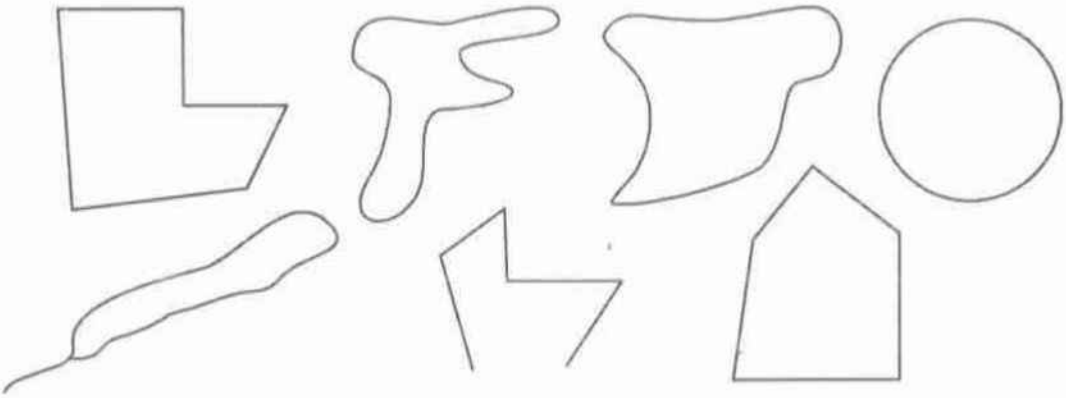
परिमाप = 2 ल. + 2 चौ.

= 2 (ल. + चौ.)

जब बच्चों को सूत्र इस्तेमाल कर सवाल हल करने को दिए जाते हैं तो वे कुछ शब्दों के अर्थ नहीं समझ पाते, केवल सूत्र रटते हैं। इन सूत्रों में लम्बाई व चौड़ाई के बीच कुछ संक्रियाओं के निशान लगे होते हैं जैसे जोड़ (+) या गुणा (×) का।

जिसकी वजह से बच्चे केवल सूत्रों को रट लेते हैं पर इनका इस्तेमाल कब व कैसे होगा यह समझ नहीं पाते।

E7) क्या इन आकृतियों का परिमाप मापा जा सकता है? कुछ तरीके सुझाइए।



आयतन

आयतन की समझ

आयतन 3–विमीय फैलाव का नाप है। डिब्बे, नोट बुक, बन्द पीपा, आलमारी, ईंट, पत्थर जैसी 3–विमीय बन्द वस्तुओं जितनी जगह अंतरिक्ष में घेरती हैं वह उनका आयतन होता है। आयतन यानी इन वस्तुओं द्वारा घेरी गई जगह। बच्चों को घेरी गई जगह का अहसास देने के लिए कुछ पत्थर, ईंटें, लोहे के टुकड़े आदि इकट्ठे कर लें। प्लास्टिक की एक बाल्टी में पानी भर लीजिए। हर वस्तु को धागे से बांधकर उन्हें एक–एक करके पानी में डुबाइए। देखिए कि क्या हर बार पानी का तल एक बराबर ही बढ़ता है। बच्चों से निम्न प्रश्नों पर चर्चा कीजिए।

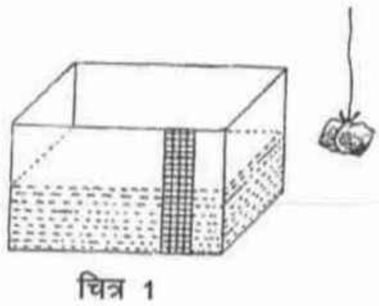
- पानी का तल सबसे ऊंचा कब उठा?
- ऐसा क्यों होता है?
- तल अलग–अलग क्यों बढ़ता है?
- डुबाई गई वस्तु के साइज और पानी के तल के बीच क्या संबंध होता है? आदि।

एक बार बच्चों को घेरे गए आयतन का अहसास हो जाए तो वे दो वस्तुओं के आयतन की तुलना कर सकते हैं। दो असमान वस्तुओं के आयतन की तुलना निम्नलिखित गतिविधि द्वारा की जा सकती है।

उदाहरण : दो पत्थर लीजिए, जिनके आयतन की तुलना करनी है और कांच का एक आयताकार बर्तन लीजिए। कांच के बर्तन में 3/4 पानी भर दीजिए। इस पर चित्रानुसार ग्राफ पेपर की एक पट्टी चिपका दीजिए।

सबसे पहले ग्राफ पेपर की पट्टी के खाने गिनकर पानी का तल पढ़ लीजिए। अब पत्थरों को एक–एक धागे से बांध लीजिए। चित्र 2 के अनुसार एक पत्थर को पानी में डुबाइए और पानी के तल में हुए परिवर्तन को नोट कीजिए। इसी प्रकार से दूसरे पत्थर को पानी में डुबाकर पानी के तल को पढ़ लें।

बच्चों से पूछिए कि पानी का तल कब ज्यादा चढ़ा? क्यों? कौन सा पत्थर ज्यादा जगह घेरता है? किसका आयतन ज्यादा है? आदि।


चित्र 1

कभी–कभी दो वस्तुओं के आयतन की तुलना उनके द्वारा घेरी गई जगह की तुलना से भी की जाती है। जैसे मेज की दराज में कौन सी वस्तु ज्यादा जगह घेरती है – माचिस या साबुन की डिबिया? कौन सी वस्तु बड़ी है? किसका आयतन ज्यादा है? आदि।

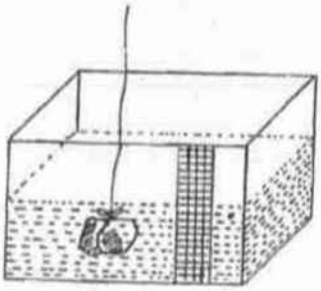
उपरोक्त गतिविधियों से बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि

i) हर वस्तु का एक नियमित या अनियमित आकार होता है।

ii) बड़ी वस्तुओं ज्यादा जगह घेरती हैं।

iii) पानी में डुबी हुई बड़ी वस्तुओं पानी की सतह को ज्यादा ऊपर उठाती हैं।

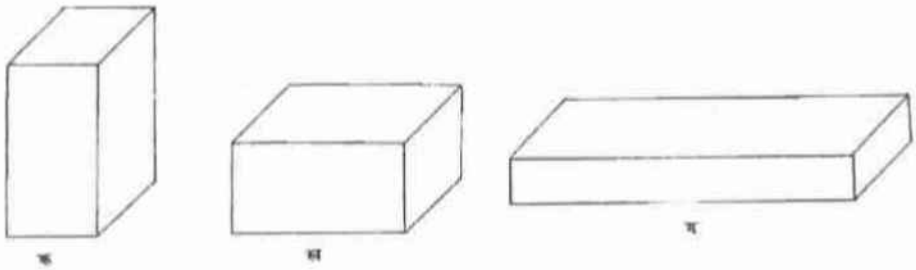
iv) जिस वस्तु का आकार ज्यादा हो, उसका आयतन भी ज्यादा होता है।


चित्र 2

आयतन का संरक्षण

घेरे गए आयतन की अवधारणा सीखते हुए बच्चों को पदार्थ की मात्रा के संरक्षण का भी अहसास रहना चाहिए। इसका आकलन करने के लिए गतिविधि।

उदाहरण : एक शिक्षक अपनी कक्षा में बच्चों को घेरे गए आयतन का अहसास पहले ही दे चुके थे। अब वे उन्हें यह समझाना चाहते थे कि अलग–अलग आकृतियों की वस्तुओं का आयतन समान भी हो सकता है। इसके लिए उन्होंने बच्चों को लकड़ी के कुछ गुटके दिखाए। (चित्र 3) ।



चित्र 3

शिक्षक : क्या इन गुटकों का आयतन समान है?

(किसी से कोई उत्तर नहीं मिला, तो उन्होंने अपने प्रश्न को अलग ढंग से रखा)

शिक्षक : क्या इन सभी गुटकों को बराबर जगह चाहिए?

(इस बार भी चुप्पी रही।)

शिक्षक : चलो, मान लो कि ये चॉकलेट के गुटके हैं। अब बताओं कि क्या इन सबमें बराबर मात्रा में चॉकलेट हैं?

पहला बच्चा : नहीं, सबमें चॉकलेट की मात्रा अलग–अलग है।

दूसरा बच्चा : नहीं सर, मुझे लगता है कि पहले दो गुटकों में तो मात्रा बराबर है। बस उन्हें अलग–अलग तरह से रखा गया है। परन्तु तीसरे गुटके में मात्रा अलग है।

शिक्षक : क्या तुम यहां आकर समझा सकते हो?

लडके ने कई तरह से दूसरे गुटके की तुलना पहले गुटके के साथ की। वह यह कर ही रहा था कि अन्य बच्चे चिल्ला पड़े।

कई बच्चे : जी हां सर, पहले दो गुटके एक ही साइज के हैं।

शिक्षक : क्यों?

कक्षा में अस्पष्ट फुसफुसाहट होने लगी और एक बच्चा चिल्लाया।

एक लड़का : सर, ये बराबर जगह घेरते हैं।

शिक्षक : क्या तुम सब इससे सहमत हो?

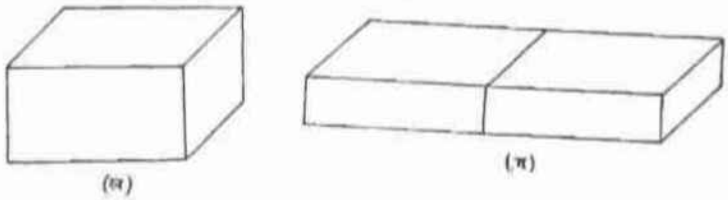
सारे बच्चे : जी सर।

शिक्षक : क्या मैं कह सकता हूं कि इनका आयतन समान है?

बच्चे सहर्ष सहमत हुए।

शिक्षक : परन्तु तीसरे गुटके के बारे में क्या कहोगे? इसका भी आयतन उतना ही है। यदि तुम इसे ध्यान से देखोगे तो पता चलेगा कि इसकी ऊंचाई तो (ख) से आधी है मगर लम्बाई उससे दुगनी है।

परन्तु बच्चे भ्रमित नजर आ रहे थे। इसलिए शिक्षक ने उनके सामने (ख) और (ग) के ही समान दो और गुटके रखे। अन्तर सिर्फ इतना था कि इस बार (ग) दो भागों में बंटा हुआ था। (चित्र 4)।



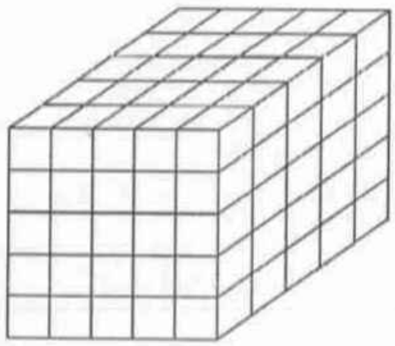
चित्र 4

शिक्षक ने दूसरे गुटके के टुकड़ों को अलग–अलग किया और उन्हें एक–दूसरे के ऊपर इस तरह जमाया कि नया गुटका हुबहू चित्र 4 (ख) में दिखाये गुटके जैसा दिखने लगा। तब बच्चे यह समझ गए कि सभी गुटकों के आकार/आयतन समान थे।

E8) आप बच्चों को यह अवधारणा समझने में कैसे मदद करेंगे कि अलग–अलग आकृतियों वाली वस्तुओं का आयतन समान भी हो सकता है?

आयतन की इकाई

आयतन नापने की मानक इकाई बताने के लिए 1 सेमी. X 1 सेमी. X 1 सेमी. नाप वाले छोटे घन को इकाई के रूप में इस्तेमाल किया जा सकता है। बच्चों को यहां यह दिक्कत आती है कि किसी ठोस वस्तु द्वारा घेरे गए आयतन तथा इसके संरक्षण की अवधारणा समझ लेने के बाद भी वे यह बात नहीं समझ पाते कि आयतन की तुलना किसी घन इकाई के बार–बार उपयोग से की जा सकती है। ठोस वस्तुओं के इकाई घनों से मिलकर बने होने की बात इसलिए स्पष्ट नहीं होती क्योंकि इसमें कई सारी घन इकाइयां तो उन्हें नजर ही नहीं आती। जैसे, किसी घनाकार ठोस के मध्य भाग में जो इकाइयां होती हैं। इस के लिए आप गतिविधि की मदद ले सकते हैं। वे लकड़ी के गुटकों (ब्लॉक्स) को तरह–तरह से जोड़–तोड़ कर अलग–अलग आकृतियां बनाये। उन्हें छोटे–छोटे घनाकार गुटकों को जोड़कर बना कोई ब्लॉक दिखाइए व उन्हें खुद पता करने दीजिए कि इस ब्लॉक में कितने छोटे घन लगे हैं (चित्र 5)।



चित्र 5

उनसे यह पता करने को कहिए कि घनाकर गुटकों के रूप में ब्लॉक का आयतन कितना है। कुल कितने सेंटीमीटर घन हैं। आप उन्हें टोलियों में काम करने को भी कह सकते हैं। हर टोली इन घनाकार गुटकों से कोई ढांचा बनाए – जैसे समान्तर–षट्फलक या घनाभ। हर टोली से निम्न बिन्दुओं पर चर्चा करे–

i) पूरे ढांचे को बनाने में लगे घनों की संख्या।

ii) ढांचे में परतों की संख्या।

iii) एक परत में कतारों की संख्या।

iv) एक कतार में घनों की संख्या।

v) एक परत में घनों की संख्या।

vi) इन घनों के रूप में ढांचे का आयतन।

vii) सारे घनों को गिनने के बजाय आयतन निकालने का छोटा तरीका।

जब आप उनके उत्तर से संतुष्ट हो जाएं तो उनसे इस घन की भुजा नापने को कहें। इससे पता चलेगा कि इस घन की हर भुजा 1 सेमी. है। तब आप उन्हें बता सकते हैं कि इसे एक सेंटीमीटर घन कहते हैं ओर ढांचे का जो आयतन उन्होंने नापा है वह सेंटीमीटर घन में है। सेंटीमीटर घन को (सेमी.)^3 भी लिखते हैं। यह आयतन नापने की मानक इकाई है। इसी प्रकार से बड़े ढांचों का आयतन नापने के लिए 1 मीटर भुजा वाले घन का इस्तेमाल किया जाता है। तब (मी.)^3 को आयतन नापने की मानक इकाई कहा जाता है।

इस गतिविधि से बच्चों को घन व घनाभ के आयतन का सूत्र खुद प्राप्त करने में भी मदद मिलेगी। वे यह समझ पाएंगे कि

घनाभ का आयतन = लम्बाई x चौडाई x ऊंचाई

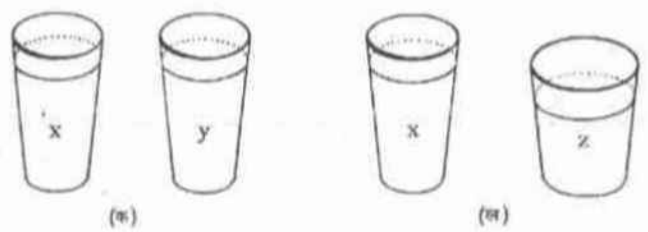
और घन का आयतन = (लम्बाई)^3 होता है।

E9) आयतन नापने की कोई गतिविधि करने के लिए आप कम लागत का क्या शिक्षण–साधन सुझाएंगे?

अक्सर यह देखा गया है कि 11–12 वर्ष के बच्चे धरिता और आयतन की अवधारणाओं को आपस में गड़बड़ कर देते हैं। वे किसी बर्तन की धारिता को उसका आयतन मानने की भूल करते हैं। जब उनसे आयतन नापने को कहा जाए तो वे धारिता नाप लेते हैं। वे आयतन व धारिता शब्दों का उपयोग पर्यायवाची की तरह करते हैं। इस मामले में हम बच्चों की मदद कैसे करें? देखे–

धारिता बनाम आयतन

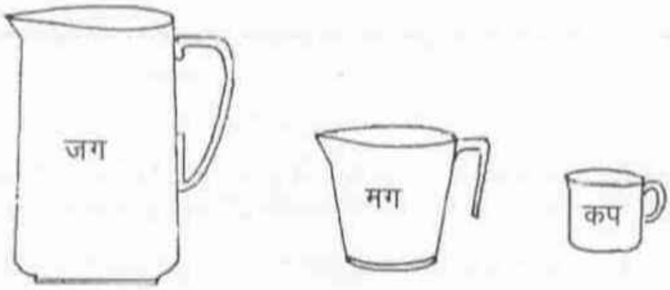
किसी पात्र की धारिता का अर्थ है कि उसमें कितना तरल पदार्थ या रेत या नमक भरा जा सकता है। चूंकि तरल पदार्थ या रेत या नमक का आकार उस पात्र के अनुसार जिसमें वे रखे गए हैं, बदलता रहता है इसलिए बच्चों को ठोस पदार्थों के संरक्षण के मुकाबले तरल पदार्थों का संरक्षण समझने में ज्यादा दिक्कत होती है। इसका आकलन करने के लिए बच्चें को दो एक जैसे गिलास X और Y दिखाइए। दोनों में बराबर मात्रा में पानी भी भरकर दिखाइए (चित्र 6)।



चित्र 6

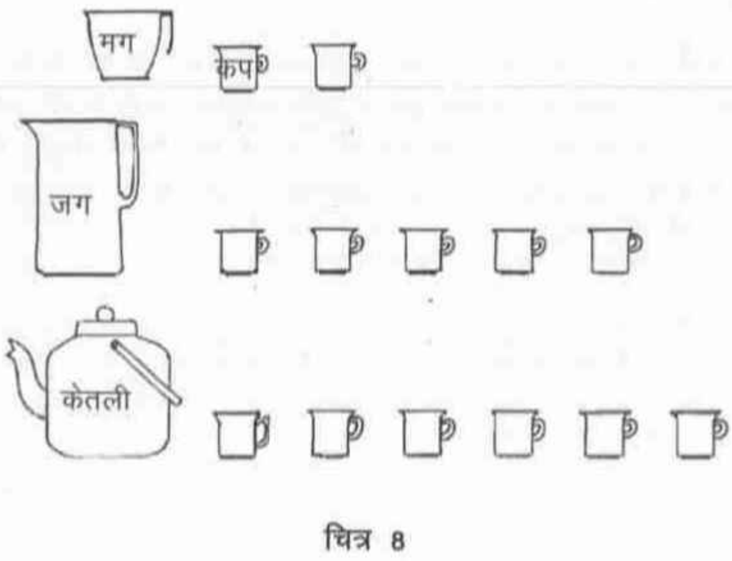
अब Y गिलास के पानी को बच्चे के सामने ही एक अन्य आकार के बर्तन Z में डाल दीजिए। अब उससे पूछिए कि क्या X और Z में बराबर पानी है। यदि वह इस सवाल का सही उत्तर नहीं दे पाता तो इसका मतलब यह है कि अभी उसने इस अवधारणा को ग्रहण नहीं किया है। इसके लिए पानी को (बगैर छलकाए) वापिस Y गिलास में डालकर उसे दिखाया जाए।

बच्चों को अलग–अलग आकार के बर्तनों की धारिता की तुलना करने का हुनर भी हासिल करना चाहिए। उन्हें यह बताने में दिक्कत नहीं होनी चाहिए कि एक मग में एक कप से ज्यादा पानी आता है और एक जग में मग से ज्यादा (चित्र 7)।



चित्र 7

एक कप में पानी भरकर उसे एक खाली मग में डालने से, या एक मग को पानी से भरकर उसे एक जग में उड़ेलने की क्रिया के द्वारा बच्चों को यह तय कर पाने में मदद मिलेगी। आप बच्चों से यह भी कह सकते हैं कि विभिन्न बर्तनों की धारिताओं के बारे में अपने निष्कर्षों को चित्रों के रूप में रिकॉर्ड करें (चित्र 8) इस चित्र को देखकर आप बता सकते हैं कि जग में मग से ज्यादा वस्तु समाएंगी और केतली में सबसे ज्यादा। इस मामले में कप धारिता नापने की भौतिक इकाई मानी जाएगी। तब आप धारिता की बात इस भौतिक इकाई के संदर्भ में कर सकते हैं। मसलन मग की धारिता दो कप है, जग की धारिता 5 कप है और केतली की धारिता 6 कप है।

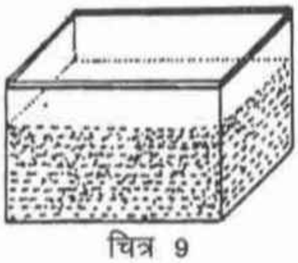


चित्र 8

चम्मच, जग, फ्रुटी के डिब्बे वगैरह कई वस्तुओं ली जा सकती हैं। इनमें से किसी भी वस्तु को धारिता नापने की भौतिक इकाई के रूप में इस्तेमाल किया जा सकता है।

E10) आप यह बात समझाने के लिए क्या करेंगे कि बड़े बर्तन में ज्यादा वस्तु समा सकती है, इसलिए इसकी धारिता भी ज्यादा है?

एक बार बच्चे भौतिक इकाई के रूप में धारिता नापने लगेंगे तो जल्दी ही वे धारिता नापने के लिए मानक इकाई की जरूरत भी समझने लगेंगे। उन्हें मानक इकाई की जरूरत महसूस कराने के लिए क्षेत्रफल व आयतन की तरह ही चर्चा कर सकते हैं। जहां तक धारिता नापने की अवधारणा के विकास की बात है, तो बच्चे इसका अर्थ अलग–अलग ढंग से निकालते हैं। यदि यह पता करना हो कि पानी से ऊपर तक भरे हुए किसी फिश टैन्क में कितना पानी है। (चित्र 9)।


चित्र 9

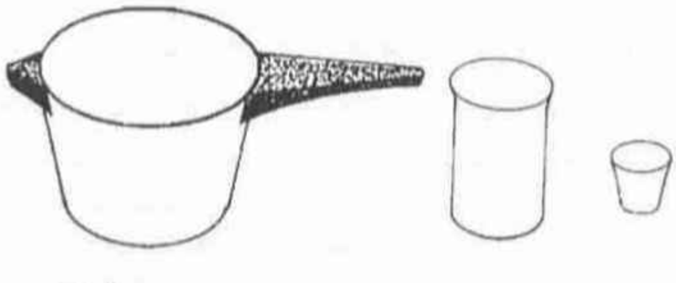
आप 11–वर्षीय बच्चों से निम्न तरह के उत्तरों की उम्मीद कर सकते हैं :

1. पहले मैं टैन्क को पानी सहित तौल लूंगा। फिर खाली टैन्क को तौलूंगा और दोनों वजनों को घटाकर पानी का वज़न निकाल लूंगा।
2. मैं दूध की एक बोतल लूंगा और इससे भर–भरकर टैन्क का पानी खाली करूंगा। मैं गिनता जाऊंगा कि टैन्क खाली करने में मुझे बोतल को कितनी बार भरना पड़ा।
3. मैं टैन्क को नापकर उसका आयतन पता कर लूंगा (इस बात का कोई जिक नहीं है कि ऊंचाई पूरे टैन्क की होगी या पानी की)।
4. मैं डण्डी का उपयोग करूंगा पानी में एक डण्डी को डुबाकर देखूंगा और नाप लूंगा कि डंडी कितनी गीली हुई।

E11) आपको क्या लगता है, उत्तरों में इतनी विविधता क्यों हैं? क्या इनमें से कोई उत्तर सही है?

उपरोक्त परिस्थिति से जाहिर है कि धारिता नापने के सवाल को लेकर बच्चों में ढेरों भ्रम मौजूद हैं। इन्हें निम्नलिखित गतिविधि से दूर किया जा सकता हैं–

धारिता नापने की रूढिगत इकाइयां लीटर व मिलीलीटर हैं। कक्षा में व्यावहारिक दृष्टि से तो 100 मिलीलीटर (यानी लीटर का 10 वां भाग) की इकाई उपयुक्त है। दही के खाली डिब्बों का उपयोग इस काम के लिए किया जा सकता है। यदि आप बच्चों को एक ऐसा पलास्क देते हैं जिसमें 1 लीटर वस्तु समा सकती है, तो वे आसानी से देख पाएंगे कि ऐसे 10 डिब्बे पानी से फ्लास्क को पूरा भरा जा सकता है। अब बच्चे इन डिब्बों की सहायता से पानी या रेत की मात्रा नाप सकते हैं। यदि वे यह पता करना चाहते हैं कि एक सॉसपेन में कितना पानी आता है, तो वे सॉसपेन को पानी से भरकर उसके पानी को फ्लास्क में उड़ेल सकते हैं। मान लीजिए कि एक सॉसपेन से एक फ्लास्क पूरा और दूसरा फ्लास्क थोड़ा भर जाता है। अब थोडे भरे फ्लास्क का पानी दही के खाली डिब्बों की सहायता से नापा जा सकता है (चित्र 10) मान लीजिए इससे दही के 6 डिब्बे भर जाते हैं तो बच्चों को यह पता लग जाएगा कि सॉसपेन में कुल मिलाकार 16 डिब्बे पानी आता है। ऐसी गतिविधि से बच्चों की स्थानीय मान की समझ भी पुख्ता होगी क्योंकि वे नाप को दहाई व इकाई से जोड़कर देख पाएंगे।



सांसपेन फ्लास्क

चित्र 10

जब बच्चों को डिब्बों से धारिता नापने का काफी अभ्यास हो जाए, तब बच्चों को फ्लास्क की धारिता यानी 1 लीटर से परिचित कराया जा सकता है। यदि यह फ्लास्क कांच का हो, तो बच्चे इस पर छोटे खण्ड भी अंकित कर सकते हैं। इसके लिए फ्लास्क पर कागज की एक पट्टी चिपका दें और फिर डिब्बे से भर–भरकर इसमें पानी डालें। हर बारी एक डिब्बा पानी डालने के बाद पानी के तल का निशान कागज की पट्टी पर लगा लें। यदि बच्चे चाहें तो इस फ्लास्क से भी वे धारिता नापने की गविविधि जारी रख सकते हैं।

E12 आप अपनी कक्षा में 'धारिता' की अवधारणा सिखाने के लिए क्या प्रक्रिया अपनाते हैं?

E13 आप धारिता और आयतन की अवधारणा का अन्तर कैसे समझाएंगे?

सारांश

इस पाठ में हमने निम्न बिन्दुओं पर चर्चा की :

1 लम्बाई, क्षेत्रफल नापने की जरूरत को उभारा गया है।

2 लम्बाई नापने के रूढ़िगत उपकरणों का उपयोग शुरू करने से पहले जरूरी है कि बच्चे नापी जाने वाली लम्बाई का अनुमान लगा पाएं ताकि मापन उपकरण के उपयोग में हुई किसी बड़ी गलती को और उसके कारण प्राप्त नाप में हुई गलती को आसानी से पकड़ा जा सके।

3 जैसे लम्बाई रैखीय चीज का साइज बताती है, उसी तरह क्षेत्रफल किसी समतल आकृति (दो विमीय आकृति) का साइज बताता है। किसी समतल आकृति का आकार/क्षेत्रफल उसका 'फैलाव' है। ऐसी कई गतिविधियों की चर्चा की गई है जिनसे बच्चे गैर–मानक व मानक दोनों तरह की इकाइयों में क्षेत्रफल निकाल सकते हैं। इन गतिविधियों से बच्चों को यह भी समझने में मदद मिलती है कि अलग–अलग आकृतियों का क्षेत्रफल समान भी हो सकता है और उन्हें किसी आयत अथवा वर्ग के क्षेत्रफल का सूत्र खुदबखुद प्राप्त करने में भी मदद मिलती है।

4. आयतन नापने के लिए लकड़ी के गुटकों या माचिस की खाली डिब्बियों का उपयोग किया जा सकता है। इन गैर–मानक इकाइयों के इस्तेमाल के अनुभव से बच्चों को यह स्पष्ट हो जाएगा कि विभिन्न व्यक्तियों द्वारा इन इकाइयों का उपयोग किया जाए तो किसी वस्तु की लम्बाई/क्षेत्रफल/आयतन का नाप अलग–अलग आ सकता है। नाप में गैर–मानक इकाई के बदलते आकार के अनुसार नाप में भी बदलाव आ जाता है। लिहाजा वे मापन में एक मानक इकाई की जरूरत महसूस करेंगे।

5. बच्चों को आयतन का संरक्षण, दो वस्तुओं के आयतन की तुलना तथा भौतिक इकाई व मानक इकाइयों के रूप में आयतन नापना सीखने में मदद देने के लिए विभिन्न गतिविधियां।

6. बच्चों को 3–विमीय वस्तुओं के आयतन व धारिता के बीच अन्तर समझाने के तरीके।

पाठ – 8
समय का मापन

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- कल, आज और कल
- अन्तराल बनाम एक क्षण
- गणितीय क्रियाओं में सम्बन्धित दिक्कतें
- सारांश

परिचय

एक दिन मैंने अपनी दोस्त से पूछा कि क्या उसका 6 वर्षीय पुत्र राजू समय से जुड़ी अवधारणाएँ समझ पाता है। उसका जवाब था, कि वह घड़ी देखकर वक़्त बता सकता है। बाद में मैंने जब राजू से पूछा कि घड़ी में कितने बजे हैं, तो उसने सही सही बता दिया, "11 बजे हैं"। 'फिर मैंने उससे पूछा कि उसकी क्लास उससे पहले शुरू होती है या बाद में, तो उसके पास कोई जवाब न था। क्या आप यह कह सकते हैं कि राजू ने समय से जुड़ी अवधारणाएँ समझ ली हैं? इनका जवाब देने के लिए हमें ये मालूम होना ज़रूरी है कि ये अवधारणाएँ क्या हैं? इस इकाई में हम इनमें से कुछ अवधारणाओं की बात करेंगे। मसलन, इनमें से एक है घटनाओं को सिलसिलेवार जमाना। यानी कौन सी घटना किसी अन्य घटना से पहले या बाद में हुई और उनके बीच कितने समय का अन्तर रहा और, हाँ, इसके साथ जुड़ी शब्दाली, जैसे 'अभी, बाद में, पहले, कभी' वगैरह। इकाई के पहले हिस्से में हम समय से संबंधित अवधारणाओं यानी 'समय का बीतना', 'समय का यह क्षण' और 'समय का अन्तराल' पर गौर करेंगे। आगे के भागों में हम कुछ ऐसी समस्याओं पर ध्यान देंगे जो बच्चों को इन अवधारणाओं को और इनसे जुड़ी भाषा को समझने में आती हैं। हम उन तरीक़ों पर भी गौर करेंगे जिनसे काफी हद तक इन दिक्कतों को दूर किया जा सकता है।

इसके बाद हम 'समय' से संबंधित एक और कार्रवाई की बात करेंगे जो कि समय से संबंधित हो और घटाने में आती है। इसमें ज़यादातर बच्चे और कई बड़े भी गलतियाँ करते हैं। ये गलतियाँ मुख्य रूप से इस वजह से होती हैं कि समय का मापन साठमिक प्रणाली के आधार पर होता है– यानी स्थानीय मान की एक ऐसी प्रणाली जिसका आधार 60 होता है हम आगे बच्चों को इस प्रणाली में दक्षता हासिल करने और संक्रियाओं को सही–सही लागू करने में उन्हें मदद करने वाले तरीकों पर चर्चा करेंगे। अब एक नज़र इस इकाई के उद्देश्यों पर।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- समय संबंधी अवधारणाएँ बताने के लिए बच्चों के रोज़मर्रा के अनुभवों का इस्तेमाल करने के तरीके सुझा पाएँगे।
- ऐसे तरीके खोज पाएँगे जिन्हें आप बच्चों की समय के एक क्षण और समय के एक अन्तराल के बीच का अन्तर समझने में मदद कर सकें।
- बच्चों की समय के जोड़–बाकी करने की क्षमता को बेहतर बनाने के लिए कई गतिविधियाँ भी बना पाएँगे।
- अपने तरीकों के असर का आकलन कर पाएँगे।

कल, आज और कल

सभी बच्चों को समय का एक मोटा–मोटा अहसास तो होता ही है। मसलन जब कोई बच्ची यह शिकायत करती है कि उसे स्कूल जाने के लिए 'जल्दी' उठना पड़ता है जबकि उसकी बहन सोती रहती है, तो उसके शब्द 'जल्दी' का संबंध समय से ही तो है। इसी तरह से बच्चे अलग–अलग कामों में लगने वाले समय की तुलना के लिए कई शब्दों का इस्तेमाल करते हैं। गाँवों में यह एक आम खेल है कि जब बच्चे नदी–तालाब में नहाते हैं तो एक बच्चा पानी में डुबकी लगाता है और दूसरे बच्चे किनारे पर बैठकर 1, 2, 3, ... गिनना शुरू कर देते है। इस तरह से देखा जाता है कि वह कितनी देर तक पानी के अंदर डुबकी लगाकर रह सकता है। और फिर कौन सबसे ज्यादा देर तक पानी में रहा, इस बात को लेकर एक दूसरे से तुलना की जाती है।

समय से संबंधित ऐसे और कौन–कौन से शब्द हैं जिनका इस्तेमाल 6–7 साल के बच्चे आमतौर पर करते हैं? निम्नलिखित अभ्यास करते हुए आप कुछ ऐसे उदाहरण सोच सकते हैं।

E1) अपने आसपास के बच्चों से बातचीत करके ऐसे 10 शब्दों की सूची बनाइए जिनका इस्तेमाल समय को व्यक्त करने के लिए करते हैं।

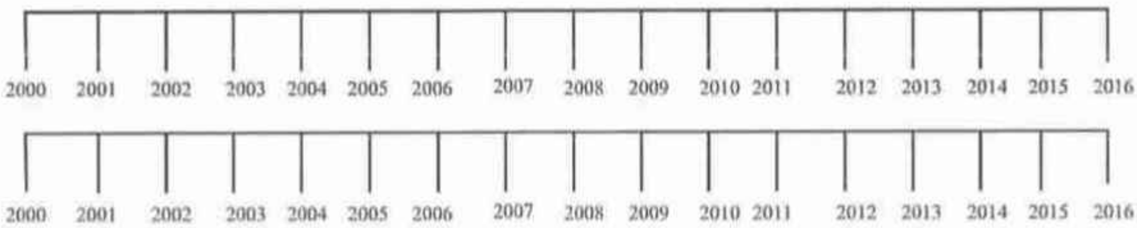
हम अगर 7 बरस की किसी बच्ची से पूछें कि उसकी उम्र ज्यादा है या उसके पिता की, तो शायद वह आसानी से बता देगी। हम अगर उनसे यह पूछें कि 'उन दोनों में से कौन पहले पैदा हुआ था', तो शायद जवाब देने से पहले वह थोड़ा सोचेगी। और हम अगर उससे यह पूछ लें कि 'तुम्हारे पिता और दादा में से कौन पहले पैदा हुए थे', तो शायद उसके लिए सचमुच एक समस्या उठ खड़ी हो। इससे क्या पता चलता है? इससे ज़ाहिर होता है कि जो तभी घटा हो, उसको समझ पाना बच्ची लिए इतना मुश्किल नहीं है मगर काफी समय पहले घटी घटनाओं में समय का हिसाब लगा पाना उसके बस के बाहर है। यानी '400 ईसा पूर्व' या वैदिक काल जैसे शब्दों का उसके लिए कोई अर्थ नहीं है। इसलिए हमें इन्हें ये पहलू सिखाने चाहिए।

जब मैंने अपनी एक शिक्षक मित्र से पूछा कि वे कक्षा 3 के बच्चों को ये पहलू कैसे सिखाती हैं तो उनका जवाब था कि उनकी रणनीति इस बात पर निर्भर करती है कि बच्चों की 'समय' संबंधी समझ का स्तर क्या है। हम उनकी शिक्षण रणनीति को यहाँ एक उदाहरण के तौर पर पेश कर रहे हैं।

उदाहरण 1 : 'समय' पढ़ाना शुरू करने से पहले वे छात्रों से गपशप के दौरान यह पता लगाती हैं कि कितने बच्चे ऐसे सवालों के जवाब दे पाते हैं :

1. आज क्लास में सबसे पहले कौन आया था?
2. तुममें से कितने बच्चे पहली घण्टी बजने से पहले क्लास में आ गए थे?
3. क्लास में सबसे बाद में कौन आया था?
4. स्कूल में पहली घण्टी कितने बजे बजती है?
5. कल कौन–कौन ग़ैर हाज़िर थे?
6. आज कौन सा दिन (वार) है?
7. कल कौन सा दिन (वार) होगा?
8. कल कौन सा दिन (वार) था?
9. पहले पीरियड में कौन सा विषय सीखते हो?
10. तुम और तुम्हारे दोस्त में से किसकी उम्र ज्यादा है?
11. घर से स्कूल आने में तुम्हें कितना समय लगता है?

उन्होंने बताया कि बच्चों से सारे सवालों के जवाब देने की उम्मीद नहीं होती। पर उनके जवाबों से आपको यह पता लगाने में मदद मिलती है कि उनकी समझ का स्तर क्या है। इसी तरह आप बच्चों को 'दिन' (कल–आज–कल) की अवधारणा समझाने के लिए उनसे कुछ आम वाक्यों के बारे में पूछ सकते हैं। मुख्य बात यह है कि आप बच्चों को ये अवधारणाएँ, उनकी रोज़मर्रा की गतिविधियों से जोड़कर सिखा सकते हैं। इसके बाद उन्होंने बताया कि एक रेखा पर दर्शाने से बच्चों को 'अतीत, वर्तमान, भविष्य' में मदद मिल सकती है। उन्होंने चित्र 1 की तरह एक रेखा खींची और उस पर वर्ष अंकित कर दिए (देखें चित्र 1)।



चित्र 1

उन्होंने बताया कि वे कक्षा के हर बच्चे को एक–एक कागज़ दे देती हैं जिस पर चित्र 1 की तरह निशान अंकित होते हैं। आप फिर चित्र 1 के इर्द गिर्द एक गतिविधि बना सकते हैं। बच्चों को कहें कि वे इन सवालों के जवाब ढूंढे।

1. अभी तुम्हारी उम्र कितनी है?
2. तुम्हारा जन्म किस साल में हुआ था?
3. तुम्हारी पहली सालगिरह कब थी?
4. सन् 2014 में तुम्हारी उम्र कितनी होगी?

इसके बाद वे उन्हें समय–रेखा पर विभिन्न घटनाओं के वर्ष दर्शाने के काफी मौके दिए। बच्चे विभिन्न घटनाओं को रेखा पर बिंदुओं के रूप में दिखाएँगे, धीरे–धीरे बच्चे यह देख सकेंगे कि जो घटनाएँ पहले हुई थीं वे किसी एक निर्धारित बिन्दु के बाईं ओर आती हैं जबकि बाद में हुई घटनाएँ उसी बिन्दु के दाईं ओर आती हैं।

एक रेखा पर समय को दर्शाने के कई लाभ हैं। बच्ची को इससे यह देखने में मदद मिलती है कि उसके पिता के जन्म का वर्ष उसके अपने जन्म के वर्ष से ज्यादा बाईं ओर है तथा उसके दादा के जन्म का वर्ष और भी ज्यादा बाईं ओर है। इस रेखा से इसे यह भी समझने में मदद मिलती है कि अतीत और भविष्य दोनों ही अन्तहीन हैं।

ऊपर दिए उदाहरण से ज़ाहिर है कि समय की अवधारणा समझाने का मतलब सिर्फ घड़ी देखना सिखाने से नहीं है। इस अवधारणा में अतीत–वर्तमान–भविष्य का ज्ञान भी शामिल होना चाहिए।

हमें उनके रोज़मर्रा जीवन से संबंधित गतिविधियों द्वारा, और उनके साथ बातचीत करके उनकी मदद इस बात के लिए करने की ज़रूरत है कि वे इन अवधारणाओं की अपनी समझ साफ–साफ बता सकें।

E2) 'समय–रेखा' के इस्तेमाल के सकारात्मक व नकारात्मक पहलू क्या–क्या है?

E3) विभिन्न उम्र के कुछ बच्चों से बातचीत करके पता लगाइए कि क्या वे अतीत, वर्तमान और भविष्य की अवधारणाएं समझते हैं। मसलन, आप यह देख सकते हैं कि क्या वे आपको 2 साल पहले की और साथ ही साथ 10 साल पहले की कोई घटना बता सकते हैं। या यह देखने की कोशिश कीजिए कि क्या वे 10 साल बाद और 100 साल बाद होने जा रही घटनाओं के बीच अन्तर समझते हैं।

ये दोनों अभ्यास करते हुए आपने देखा होगा कि विभिन्न उम्र समूहों में समझ का स्तर अलग–अलग होता है। विभिन्न उम्र समूहों के बच्चों में इस अवधारणा की समझ के स्तर को लेकर कई मनोवैज्ञानिकों ने अध्ययन किए हैं।

परिशिष्ट में दी गई जानकारी में आपने देखा होगा कि बच्चे 'अगला', 'आखिरी, 'अभी' वगैरह शब्दों का उपयोग करते हैं। मगर हम यहाँ स्पष्ट कर देना चाहते हैं कि इन शब्दों के उपयोग का यह कतई मतलब नहीं है कि बच्चों ने उस अवधारणा को समझ लिया है। दूसरी बात यह है कि 'अपनी उम्र बता देना' या 'अपनी उम्र जानने' का मतलब यह नहीं है कि बच्चे ने उम्र की अवधारणा को समझ ही लिया है। एक उदाहरण पर ग़ौर कीजिए। "एक बार मेरे पड़ोसी की आठ साल की बच्ची ने मुझसे पूछा कि मेरे बेटे विष्णु का हैप्पी बर्थ डे किस महीने में है। मैंने बताया कि अगस्त में है। उसने फौरन कहा कि इसका मतलब हुआ कि विष्णु मुझसे बड़ा है। जब मैंने उससे कारण पूछा तो उसने समझाया कि उसका हैप्पी बर्थ डे दिसम्बर में है, जो अगस्त के बाद आता है। बाद में जब मैंने उससे पूछा कि ऐसा कैसे हो सकता है, विष्णु तो बहुत छोटा है (विष्णु तब एक साल का था), तो उसे समझ में आया कि उसका कथन बेतुका है।

प्रश्न आपको क्या लगता है, उसने ऐसा जवाब क्यों दिया होगा?

उपरोक्त उदाहरण में उस बच्ची की जो दिक्कत है, वह कोई अनोखी बात नहीं है। इस संदर्भ में 10 वर्षीय कुछ भारतीय बच्चों पर एक अध्ययन किया गया था। इन बच्चों को एक अभ्यास दिया गया। तालिका 1 में 5 बच्चों के सालगिरह की तारीखें दी गई हैं।

तालिका 1

सीमा	14 जून 1964
राहुल	20 अप्रैल 1963
दीपक	23 मार्च 1964
नेहा	12 अगस्त 1963
दीपिका	2 मई 1964

यह तालिका 10 साल के बच्चों को दिखाकर पूछा गया कि "इन बच्चों में से कौन सबसे बड़ा है?" 59 प्रतिशत बच्चों ने तो सही–सही राहुल को चुना मगर 21 प्रतिशत बच्चों ने दीपक को सबसे बड़ा बताया। इसका कारण शायद यह था कि मार्च का महीना सबसे पहले आता है या शायद यह कि 23 सूची में सबसे बड़ी संख्या है।

आपके ख्याल में यह समस्या इतनी आम क्यों है? क्या ऐसा इसलिए है कि बच्चों ने घटनाओं को क्रमबद्ध करना नहीं सीखा है? यह क्षमता विकसित करने में हम उनकी मदद कैसे कर सकते हैं?

इसके लिए निम्नलिखित गतिविधियों जैसी गतिविधियाँ मददगार हो सकती हैं।

गतिविधि : कार्डों का एक सेट बनाइए, जिन पर दिन की घटनाएँ लिखी हों जैसे कि उठना, मंजन करना, नाश्ता वगैरह। बच्चे को कार्डों का सेट देकर कहिए कि इन्हें एक क्रम में जमाएँ। इसमें बच्चे को दिन भर की घटनाओं को शुरू से आखिर तक क्रम से जमाना होगा। शुरूआत में हम तीन कार्ड दे सकते हैं और फिर चार कार्ड, पांच कार्ड दिए जा सकते हैं।

ग़ौरतलब है कि इस गतिविधि में बच्चे को किसी एक दिन की घटनाओं पर ही ध्यान देना होगा। उम्र के संदर्भ में उसे तीन वस्तुों पर ध्यान देना होता है– वर्ष, महीना और तारीख। इसलिए आपको उन्हें चरणबद्ध गतिविधियाँ देनी होंगी। पहले तो ऊपर बताई गई गतिविधि ही दे सकते हैं। उसके बाद उन्हें ऐसी गतिविधि दीजिए जिनमें घटनाओं का क्रम दो कारकों के आधार पर जमाना हो और उसके बाद तीन कारकों वाली गतिविधि दे सकते हैं। बच्चों को ये गतिविधियाँ वैसे वैसे दी जा सकती हैं जैसे जैसे वे उनके लिए तैयार होते जाएँ। हो सकता है कि आपको ये गतिविधियाँ दो वर्ष की अवधि के दौरान देनी पड़े। क्यों न अब एक अभ्यास हो जाए?

E4) एक ऐसी गतिविधि सुझाइए जिससे बच्चे को तीन कारकों, (तारीख, महीना एवं वर्ष) के आधार पर घटनाओं का क्रम जमाना सीखने में मदद मिले।

अन्तराल बनाम एक क्षण

पिछले भाग में हमने देखा कि समय की स्पष्ट समझ बनाने के लिए बच्चों को 'अतीत–वर्तमान–भविष्य' की अवधारणा का ज्ञान होना चाहिए। यहाँ हम 'समय' के एक और पहलू की चर्चा करेंगे। जिसे समझने में कुछ बच्चों को कठिनाई होती है।

आपने 7–8 वर्ष की बच्ची को 'मिनट', 'घण्टे' जैसे शब्दों का उपयोग करते प्रायः सुना होगा। मसलन वह कहेगी कि 'मैं आधे घण्टे बाद आऊँगी।'

एक उदाहरण के तौर पर, एक बार मैंने अपने पड़ौस में रहने वाली 6 साल की बच्ची से पूछा– "तुम्हारी कक्षायें विद्यालय में किस समय पर प्रारम्भ होती हैं?" तो उसने कहा, "9 बजे।"

तब मैंने उससे पूछा कि तुम घर से किस समय निकलती हो, तो उसका जवाब था '8.30' बजे। तो, तुम्हें घर से स्कूल पहुँचने में कितना समय लगता है। उसने कहा '1 घण्टा'। उसके जवाब से ज़ाहिर है कि उसे समय की स्पष्ट अवधारणा नहीं है। दरअसल मैंने जो दो सवाल उससे पूछे थे–

(i) घर से निकलने और स्कूल शुरू होने का समय।

(ii) स्कूल पहुँचने में लगने वाला समय।

ये समय के दो अलग–अलग पहलू दिखाते हैं। पहले सवाल का संबंध समय के 'एक क्षण' से है और दूसरे का संबंध 'समय अन्तराल' या समय की अवधि से है।

समय के एक क्षण का मतलब उस समय से है जिस पर कि कोई घटना घटती है। जब हम समय के लिए घड़ी देखते हैं या किसी से एक खास दिन मुलाकात का समय तय करते हैं या किसी घटना से घटित होने का साल याद करते हैं, तो हम समय का इसी अर्थ में उपयोग करते हैं

अवधि (अन्तराल) का मतलब होता है कि किन्हीं दो घटनाओं के बीच कितना समय बीता है। मसलन स्कूल की पहली घण्टी से आखिरी घण्टी के बीच का बीता समय स्कूल लगने की अवधि है। यानी समय अंतराल का संबंध दो घटनाओं से होता है। एक शुरूआती घटना और दूसरी अन्तिम घटना। ज़ाहिर है कि समय अंतराल या समयावधि पता लगाने के लिए ज़रूरी है कि हमें घटनाओं के क्रम की जानकारी हो। बच्चों को यह क्षमता विकसित करने में मदद देने के तरीकों की चर्चा हम पिछले भाग में कर ही चुके हैं

इसलिए समयावधि की अवधारणा सीखने की एक पूर्वशर्त यह है कि घटनाओं के क्रम की समझ हो। 'अवधि' को समझने के लिए बच्चों को 'अभी', 'बाद में', 'किसी समय' वगैरह शब्दों से भी परिचित होना चाहिए।

यहाँ यह बात सामने आती है कि स्कूल पूर्व स्तर से ही बच्चों को कई गतिविधियों के ज़रिए घटनाओं को क्रम में जमाने का प्रशिक्षण देना शुरू करना ज़रूरी है। इससे आगे चलकर बच्चे को समय की स्पष्ट समझ विकसित करने में मदद मिलेगी। जैसा कि हमने पिछले भाग में ज़िक्र किया था 'समय की अवधारणा' की समझ धीरे–धीरे बनती है। जैसे–जैसे बच्चों का अनुभव बढ़ता है वैसे–वैसे उनकी समझ बेहतर होती जाती है।

अब हम 'समय के क्षण' और 'समय अन्तराल' पर कुछ और विचार करें। 'समय के एक क्षण' और 'समय अन्तराल' की समझ विकसित करने में बच्चों की मदद कैसे की जाए? मैं अपनी एक शिक्षक मित्र से बात कर रही थी। यह एक प्रायोगिक स्कूल में पढ़ाती है (प्रायोगिक स्कूल यानी वह स्कूल जहाँ पढ़ाने की नई–नई विधियाँ, नये–नये पाठ्यक्रम आदि आजमाए जाते हैं)। उसने मुझे बताया कि उसने 'समय' की अवधारणा विकसित करने हेतु कई गतिविधियाँ आजमाई हैं और दरअसल इन दिनों वह कुछ बच्चों के साथ 'समय' पर ही काम कर रही थी। उसने मुझे निमंत्रित किया कि मैं उसकी कक्षा में आकर देखूँ कि बच्चे कैसे सीखते हैं। आइए देखें कि उसने उस कक्षा में क्या–क्या किया? यह करीब 2 महीने पहले की बात है जब मैं उसकी कक्षा में गई थी।

उदाहरण 2 : शिक्षक कक्षा 4 के बच्चों को सारे विषय पढ़ाती थी। स्कूल सुबह 9 बजे से दोपहर 1 बजे तक लगता था। वह अपने साथ कई कार्ड लेकर आई थी। हर कार्ड पर दिन का कोई समय लिखा, जिसे 10. 00, 11.15, 11.40, 12.10, 12.30 वगैरह। दीवार पर एक घड़ी भी टंगी थी। उसने बच्चों से घड़ी की ओर इशारा करते हुए कहा।

शिक्षक : तुम सब घड़ी पढ़ना जानते हो, है ना?

छात्र : हाँ।

शिक्षक : अब मैं जाँच करूंगी कि तुम घड़ी सही–सही देख सकते हो या नहीं। ये कुछ कार्ड हैं। (वे हर बच्चे को एक–एक कार्ड दे देती हैं और बच्चे कार्ड देखते हैं।) हर कार्ड पर एक समय लिखा है। अब तुम्हें करना यह है कि बीच–बीच में घड़ी देखते रहो। जब भी घड़ी में वही समय हो जाए जो तुम्हारे कार्ड पर है, तो कार्ड मुझे लौटा दो। जो भी यह काम सही सही करेगा, उसे इनाम मिलेगा।

कुछ बच्चे सही–सही यह काम कर पाए और कुछ नहीं। जो बच्चे सही नहीं कर पाए थे, उन्हें उसने कुछ समझाया और अगले दिन फिर से कोशिश करने को कहा। पहली कक्षा के बाद मैंने उससे पूछा कि इस गतिविधि के करने का मकसद क्या है? उसने बताया कि इस गतिविधि का मकसद यह है कि सही समय बताने की उनकी क्षमता बेहतर बने। इससे वे दिन के समय के प्रति ज्यादा जागरूक बनते हैं। उसने बताया कि वह यह गतिविधि एक हफ्ते तक नियमित समय अन्तराल पर देती रहेगी। इस समय तक बच्चे घड़ी देखकर सही समय बताना सीख जाएंगे। फिर उसने मुझे अगले हफ्ते किसी भी दिन आने को कहा।

अगली बार गई तो वह कोई अन्य गतिविधि आजमा रही थी। यह गणित की कक्षा थी और उसने उनके साथ एक अन्य गतिविधि करने का फैसला किया था। उसने कक्षा को 5 टॉलियों में बांटना। हर टोली को उसने 5 खाली कार्डों का एक एक सेट दे दिया। फिर उन्होंने एक टोली से दूसरी टोली के पास जा जाकर बच्चों को यह गतिविधि सिखाई। उदाहरण के तौर पर–

शिक्षक : घड़ी देखकर बताओ कि समय क्या हुआ है?

टोली 1 : 9.30

शिक्षक : सही। अब तुम्हें करना यह है कि हर आधे घण्टे बाद एक कार्ड वापिस करो। घड़ी देख सकते हो और कार्ड वापिस करने से पहले उस पर समय भी लिखना होगा। इसमें थोड़ी कठिनाई होती है तो आपस में चर्चा करके साफ तौर पर समझकर लिखें।

वह इसी प्रकार हर टोली के साथ गतिविधि करती रही और उसने टोली 2 को कार्ड का एक सेट दिया। उनसे उसने हर 1 घण्टे में कार्ड लौटाने को कहा। इसी प्रकार के कार्ड उसने टोली 3, 4, 5 को भी दिए और समय के अलग–अलग अंतराल भी बताए। उसने उन टोलियों को इनाम भी देना तय किया जो 5 कार्ड सही–सही वापिस लौटा देगी। उन्होंने इस गतिविधि को कुछ दिनों तक 'समय समय पर दोहराई'। बहुत मुमकिन है कि अगर कोई बच्ची इस गतिविधि को सही सही कर लेती है, तो वह यह समझ चुकी है कि 9.30 । 30 मिनट बराबर 10 होता है। पर इससे यह जाँचने में कैसे मदद मिलेगी कि बच्ची 1/2 घण्टे की अवधि का मतलब भी समझ गई है या नहीं?

इसके लिए उसने गतिविधि में थोड़ा संशोधन करके बच्चों को कहा कि घड़ी की सहायता के बगैर ही हर आधे घण्टे (या 1 घण्टे) में एक–एक कार्ड लौटाएं। उसने इसके लिए इस गतिविधि को अलग अलग तरह से दे दिया है अवधि को बदलकर '20 मिनट', '10 मिनट' वगैरह करके उसने बताया कि इस गतिविधि से बच्चों को 'समय की अवधि का मोटा–मोटा अन्दाज़' लगाने में मदद मिलेगी।

उसने टोलियों के अनुसार एक गतिविधि यह भी आजमाई कि हर टोली को करने के लिए कोई क्रिया दे दी– जैसे कोई गीत गाना, दीवार तक जाना और उसे छूना, ताली बजाना, किसी किताब से कोई अंश उतारना आदि।

उन्हें इस काम को एक तयशुदा अवधि के लिए करना होता है। मसलन शुरू में आधा घण्टा, फिर 5 मिनट, 1 मिनट वगैरह। इससे उन्हें समयावधि एक अहसास बनाने में मदद मिलेगी। इससे उन्हें यह भी समझने में मदद मिलती है कि एक ही काम को करने में अलग–अलग लोगों को अलग–अलग समय लगता है। मैंने गौर किया कि वह हर मर्तबा टोलियों से खूब बातचीत करती थी। उसने उन्हें उनके रोज़मर्रा के काम से संबंधित कई अभ्यास घर पर करने को भी दिए।

तो, इस प्रकार से शिक्षक उन्हें 'कितना समय' और 'किस समय' की समझ देती हैं और अब इससे संबंधित कुछ अभ्यास आपके लिए।

E5) किसी बच्ची की 'एक क्षण' और 'समय अंतराल' की समझ का अन्दाज़ लगाने के लिए आप उसे किस तरह के अभ्यास/गतिविधियाँ देंगे?

E6) एक ऐसा मैदानी खेल सुझाइए जिससे बच्चों की 'समय अंतराल' की अवधारणा की समझ बेहतर बने।

जब बच्चे 'समय अंतराल' व 'एक क्षण' की स्पष्ट पकड़ बना लें, तब हम दिन, सप्ताह, महीने व वर्ष को

फिर से परिभाषित कर सकते हैं। ये परिभाषाएँ अब इस रूप में हो सकती हैं कि एक दिन 24 घण्टे का है और एक सप्ताह 7 दिन का है, इत्यादि।

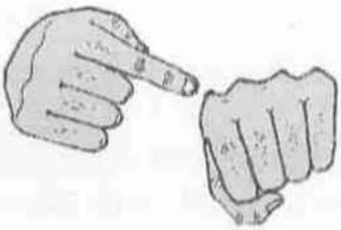
उदाहरण के लिए, एक सूर्योदय से अगले सूर्योदय या एक सूर्यास्त से दूसरे सूर्यास्त के बीच के समय को एक दिन कहते हैं। या आज दोपहर 1 बजे से कल दोपहर 1 बजे के बीच का समय भी एक दिन ही कहलाता है। यह विचार बच्चों के ध्यान में प्रायः बहुत कम लाया जाता है कि एक दिन का मतलब 24 घण्टे की किसी भी अवधि से हो सकता है। इसी प्रकार से एक सप्ताह, एक पखवाड़ा, महीना या वर्ष को भी जानी पहचानी घटनाओं के बीच की अवधि से जोड़ा जा सकता है। मसलन, एक पूर्णिमा से दूसरी पूर्णिमा के बीच की अवधि 1 महीना है। धीरे–धीरे उन्हें इस समझ की ओर ले जाया जा सकता है कि एक महीना किन्हीं चार हफ्तों के बीच की लगभग अवधि है।

कैलेण्डर बच्चों को समय के बीतने का हिसाब–किताब रखने का एक व्यवस्थित तरीका सिखाता है। हर वर्ष मौसम बदलने के साथ हम दिनों, हफ्तों, महीनों के एक नियमित चक्र में से गुज़रते हैं। सालगिरह और छुट्टियाँ साल–दर–साल आती हैं। लिहाज़ा अगली बार जब आप कैलेण्डर खरीदने जाएं, तो अपने बच्चे को साथ ले जाएं। ऐसा कैलेण्डर तलाश करें जिस पर आकर्षक चित्र के अलावा बड़े–बड़े खाने हों जिनमें लिखा जा सके, चित्र बनाए जा सकें। शुरूआत में आप बच्चे से कह सकते हैं कि वह कैलेण्डर पर उन दिनों को नोट करें जो परिवार के लिए खास महत्व रखते हों। आप हफ्ते या महीने की महत्वपूर्ण घटनाएं भी अंकित कर सकते हैं। यहाँ कैलेण्डर के साथ एक गतिविधि दी जा रही है। इससे आप यह पता लगा सकते हैं कि बच्चे इस बात को कितना समझते हैं कि किस महीने में 30 दिन होते हैं और किसमें 31।

गतिविधि : एक पुराना कैलेण्डर लीजिए। इसमें से महीनों के नाम हटा दीजिए, सिर्फ तारीख वाला हिस्सा रहने दीजिए। अब बच्चों से कहिए कि कैलेण्डर को फिर से सही तरीके से जमाएं। वे खुद ही तय करें कि कौन सा पन्ना जनवरी का है, कौन सा फरवरी का है आदि और उन्हें ठीक क्रम में जमाएं।

E7) अपने आसपास के 10 वर्षीय बच्चे के साथ यह गतिविधि करके इसका असर देखिए।

मुट्ठी की शक्ल में हाथ यह याद रखने का एक आसान तरीका है कि किन महीनों में 31 दिन होते हैं। (चित्र 2)



चित्र 2

अब एक किनारे से गिनना शुरू कीजिए (जनवरी, फरवरी इत्यादि)। शुरूआत उभरी हुई हड्डी से कीजिए, फिर उसके पास वाले गड्ढे पर जाइए, फिर हड्डी, फिर गड्ढा, वगैरह। जब चौथी उभरी हुई हड्डी पर पहुंच जाए तो फिर शुरूआती बिन्दु पर आकर गिनना जारी रखें। इस तरह करने पर जिन महीनों के नाम उभरी हुई हड्डियों पर आएं उनमें ही 31 दिन होते हैं तथा गड्ढे 30 दिन वाले महीनें। (फरवरी 28 / 29 दिन का होता है।)

बच्चों को महीनों, ऋतुओं, छुट्टियों, मौसम आदि से परिचित कराने का एक तरीका यह भी है कि उन्हें इनसे संबंधित गीत / कविताएं सुनने / गाने और रचने का अवसर दें। उदाहरण के लिए विभिन्न महीनों के दिनों की संख्या याद रखने में इस दोहे से मदद मिल सकती है :

अप जू सी नव तीस के, बाकी के इकतीस।

अट्ठाइस की फरवरी, चौथे सन् उनतीस।।

अब हम एक और समस्या पर विचार करते हैं। 5–7 वर्षीय बच्चों को तब बहुत दिक्कत होती है जब वे 24 घण्टे की घड़ी के आधार पर व्यक्त समय देखते हैं (मसलन टी.वी. पर 22.00.00 लिखा देखते हैं या रेलवे प्लेटफार्म पर लिखे समय को देखते हैं)। उन्हें समझ नहीं आता कि यह क्या समय दिखाता है। यह स्वाभाविक भी है क्योंकि जब उन्होंने अपने शिक्षक या माता–पिता से समय सीखा था, तब साधारण घड़ी का ही इस्तेमाल हुआ था। यानी 12 बजे से 12 बजे तक। 24 घण्टे की घड़ी, तो स्कूल में थोड़ी देर से सिखाई जाती है। और नहीं भी।

मान लीजिए कि कोई 7 साल की बच्ची 22.00.00 जैसा कोई समय देखकर आपसे पूछती है कि यह क्या समय दिखाता है। आप उसे कैसे यकीन दिलाएंगे कि यह समय रात के 10 बजे (10PM) का है? अगले उदाहरण में मैं बताऊँगी कि यह काम मैंने अपने पड़ोसी की बच्ची के साथ कैसे किया।

उदाहरण 4 : हम लोग टी.वी. पर एक फिल्म देख रहे थे। 2 बजे की खबरों से पहले पर्दे पर समय दिखाया गया– 14.00.00। 8 साल की मानसी ने यह देखकर पूछा :

चित्र 3

मानसी : आण्टी, यह टी.वी. पर क्या लिखा है। 14.00.00।

मैं : यह वह समय है, जब समाचार शुरू होते हैं।

मानसी : (घड़ी को देखकर) समय तो 2 बजे है। तो टी.वी. पर दो क्यों नहीं है और टी.वी. पर दो बजे के बजाय चौदह शून्य शून्य, शून्य शून्य क्यों दिखा रहे हैं?

मैंने थोड़ी देर सोचा कि कैसे समझाऊँ कि 2 बजे और 14.00.00 एक ही बात है। फिल्म पूरी होने के बाद मैंने उसे समझाना शुरू किया।

मैं : यह तो तुम्हें पता ही है कि एक दिन में 24 घण्टे होते हैं

मानसी : जी आण्टी।

मैं : अभी क्या समय हुआ है?

मानसी : पाँच बजकर तीस मिनट।

मैं : क्या तुम्हें पता है कि पाँच बजकर तीस मिनट का समय सुबह–सुबह भी आता है।

मानसी : हाँ, जब मुझे स्कूल जाना होता है तो मेरी माँ 5.30 बजे उठ जाती है।

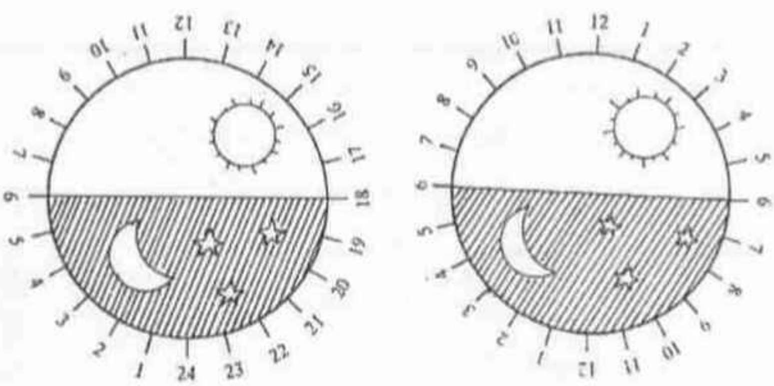
मैं : तो इस शाम वाले 5.30 को दर्शाने के लिए मैं इसे 5.30 E लिख देती हूँ। E का मतलब शाम। इसी तरह सुबह वाले 5.30 को दर्शाने के लिए 5.30 M लिख देंगे। इसी तरह सुबह 6 बजे को हम 6 बजे M और शाम वाले को 6 बजे E लिखेंगे। तुम जानती ही हो कि घड़ी का छोटा कांटा रात 12 बजे से दोपहर 12 बजे के बीच एक पूरा चक्कर काट लेता है। (मैंने पास ही रखी घड़ी के कांटे को घुमाकर भी दिखाया, देखें चित्र 3)। तो बताओ दोपहर 12 बजे के बाद क्या होगा?

मानसी : यह कांटा फिर एक चक्कर लगाएगा।

मैं : यानी सिर्फ घड़ी देखकर हम नहीं बता सकते कि उस समय सुबह है या शाम। इस बात का पता हम दिन–रात देखकर लगाते हैं। अब मैं एक घड़ी इस तरह से काटती हूँ। (मैंने चित्र 4 की तरह एक घड़ी का चित्र बनाया)।

छायादार भाग रात बताता है और सफेद भाग दिन बताता है। इस घड़ी में एक ही कांटा चक्कर लगाता है। यह कांटा जो भी टाइम बताए, वही टाइम है। यदि यह छायादार हिस्से में हो तो रात का समय है और यदि सफेद हिस्से में हो, तो दिन का समय है।

मानसी : यह तो बहुत मज़ेदार है आण्टी। मुझे भी एक ऐसी घड़ी चाहिए।



(क) चित्र 4 (ख)

मैं : ठीक है, अब इसे देखो (चित्र 4 (ख))। इस पर 1, 2, 3, ... 12 लिखे हैं जो मध्यरात्रि 12 बजे से दोपहर 12 बजे तक का समय दर्शाते हैं। इसके बाद फिर से 1, 2, 3, ... 12 तक लिखे हैं जो दोपहर 12 से रात 12 का समय दर्शाते हैं। (मैंने संबंधित हिस्सों की ओर इशारा भी किया)।

अब मैं एक ऐसी घड़ी बनाऊँगी जिसमें मैं 0, 1, 2, 3, ... 12 लिखूँगी जो रात 12 से दोपहर 12 तक का समय दर्शाएँगे (चित्र 4 क)। इसके बाद फिर से 1, 2, ... वगैरह लिखने की बजाय मैं 13, 14, ... 24 तक लिखूँगी (चित्र 4 क)। अब मैंने दोनों डिस्क को एक–दूसरे के ऊपर इस तरह रखा कि उनके केन्द्र बिन्दु एक–दूसरे के ऊपर रहें। इसके जरिए मैंने उसे समझाया कि 13 वास्तव में 1E, 14, 2E वगैरह से मेल खाते हैं। (दोनों घड़ियों से तुलना करने पर)

समय लिखने के इस तरीके को 24 घण्टा शैली कहते हैं। फिर मैंने उससे पूछा कि इस समय कितने बजे हैं। उसने घड़ी देखी और बताया कि शाम के 7 बजे हैं।

मैं : 24 घण्टी वाली घड़ी में इससे मेल खाता समय क्या है?

(उसने 7 से मेल खाता समय 24 घण्टे वाले पैमाने पर पढ़कर कहा 19 है।) अब क्या तुम्हें याद है कि टी. वी. पर क्या समय लिखा था?

मानसी : हाँ, 14 था। अरे, अब मुझे समझ आ गया कि यह दोपहर 2 बजे का समय है।

तो, वह समझ गई थी कि समय को 24 घण्टे के पैमाने पर भी दिखाया जाता है। मुझे नहीं लगता कि वह उपरोक्त चित्र के बगैर सामान्य समय को 24 घण्टे वाले समय में बदल पाएगी। ऐसा कर पाने के लिए उसे और अभ्यास की ज़रूरत होगी।

E8) कक्षा 5 के 30 बच्चों के लिए एक गतिविधि सुझाइए जिससे सामान्य समय को 24 घण्टे वाले समय में बदलने की तथा 24 घण्टे वाले समय को सामान्य समय में बदलने की उनकी क्षमता में इजाफा हो।

तो हमने देखा कि शुरूआत में बच्चे समय व्यक्त करने के दो तरीकों से भ्रमित हो जाते हैं। 'साढ़े तीन', 'सवा पांच', 'सात में दस की देर' जैसे वाक्य उनके भ्रम में इजाफा ही करते हैं। यदि कोई बच्ची आपसे पूछे कि साढ़े तीन का मतलब क्या है तो क्या आप बस इतना बताकर छोड़ देंगे कि इसका मतलब है 3.3.? या क्या आप घड़ी का इस्तेमाल करके इस वाक्य का मतलब समझाने की कोशिश करेंगे? ग़ौर करने की बात यह है कि पहली या दूसरी कक्षा के बच्चे 'आधे' 'सवा' जैसे शब्दों से भलीभांति परिचित नहीं होते। आप उन्हें बता सकते हैं कि जब मिनट वाला कांटा आधा चक्कर घूम लेता है तो यह आधा घण्टा होता है, तो 30 मिनट के बराबर है। 'साढ़े तीन' का मतलब है तीन बजे के बाद आधा घण्टा और। यानी इसका मतलब हुआ 3.30। इसी प्रकार से हम उन्हें बता सकते हैं कि समय के संदर्भ में 'सवा' का क्या मतलब है। जब वे भिन्न के बारे में पढ़ेंगे तब वे इन जुमलों का अर्थ समय के संदर्भ में ज्यादा आसानी से समझ पाएँगे।

समय दिखाने के अलग–अलग तरीकों को लेकर कई गलतफहमियाँ दाशमिक प्रणाली के प्रभाव के चलते भी पैदा होती हैं। मसलन मुद्रा प्रणाली के प्रभाव के चलते कोई बच्चा यह सोच सकता है कि 1/2 घण्टे का मतलब 50 मिनट होगा और साढ़े चार का मतलब 4.50 होगा। हम इस दिक्कत से कैसे निजात पाएँ? हम चाहेंगे कि अगला अभ्यास करते हुए आप इस सवाल का जवाब खोजें।

E9) मान लीजिए कोई बच्ची ऊपर बताई गई गलतफहमी बना लेती है। आप उसकी मदद कैसे करेंगे।

अब तक आप यह तो समझ ही गए होंगे कि समय की एक स्पष्ट अवधारणा हासिल करने से पूर्व कोई भी बच्ची कई मुकामों से गुज़रती है। समय के साथ विभिन्न गणितीय क्रियाएँ करने के लिए अवधारणात्मक समझ जरूरी है। अगले भाग में हम इसी पहलू से जुड़ी कुछ कठिनाइयों की चर्चा करेंगे।

गणितीय क्रियाओं से संबंधित दिक्कतें

एक बार मेरी मुलाकात कक्षा 6 व 7 के कुछ बच्चों से हुई। उनसे बात करते हुए मैंने उनके सामने यह सवाल रखा : 'मैं साइकिल से बाज़ार गई। मुझे पहुँचने में 1 घण्टा 20 मिनट का समय लगा। परन्तु वापिस आते वक्त मुझे 80 मिनट लगे। किस तरफ मुझे कम समय लगा?' अधिकांश बच्चों ने कहा कि वापसी में कम समय लगा। कुछ ही बच्चे यह समझ पाए कि दोनों तरफ बराबर समय लगा था। ग़ौरतलब है कि ये बच्चे समय का मापन सीख चुके हैं। तो, उनके जवाब इतने अलग–अलग क्यों हुए?

बड़े होने पर भी ये दिक्कतें बनी रहती हैं। मसलन एक कला उत्सव में एक एकांकी प्रतियोगिता और एक नृत्य प्रतियोगिता रखी गई थी। नाटक करने वाले 6 समूह थे और हर एक को अपना नाटक पेश करने के लिए कुल 40 मिनट का समय दिया गया था। आयोजकों ने 6 समूहों को दिए गए कुल समय की गणना इस तरह की : 6 × 40 यानी 240 मिनट और फिर एकांकी प्रतियोगिता के लिए 8 बजे से 10.40 बजे तक का समय तय कर दिया। नृत्य समूहों के लिए मंच का समय 10.45 से तय कर दिया गया। क्या आयोजकों की गणना सही थी? अगला अभ्यास इसी से संबंधित है।

E10) आयोजकों द्वारा की गई गणना में क्या गलती है? आपके ख्याल से क्या यह गलती कई लोग करते हैं? अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

जैसा कि आपने ऊपर वाले मामले में ध्यान दिया होगा, हममें से कई लोग समय की गणनाओं में भी अनजाने में दाशमिक प्रणाली लागू कर देते हैं। वास्तव में समय साठमिक प्रणाली पर आधारित है। यह ज़रूर है कि जैसे ही हमें बताया जाए हम अपनी लापरवाही को पकड़ लेते हैं। तो, एक बात ज़ाहिर है कि समय की गणनाएँ करने के लिए ज़रूरी है कि बच्चे साठमिक प्रणाली में दक्ष हों। इसका विकास हम कैसे करेंगे?

आइये निम्नलिखित स्थिति पर ग़ौर करते हैं–

उदाहरण 5 : एक दिन मैं अपने दोस्त के घर गई थी। वहाँ मेरी नज़र उसकी बिटिया, सीता की गणित वर्कबुक पर पड़ी, वह कक्षा पाँच में पढ़ती है। मैं वर्कबुक के पन्ने पलटने लगी। अचानक मेरी नज़र समय के एक सवाल पर रुक गई। सवाल को ऐसे हल किया गया था :

घण्टे	मिनट	
4	55	
3	52	
8	07	(8 घण्टे 07 मिनट)

मैंने जब उससे पूछा कि क्या लिखा है, तो उसने बताया कि कक्षा में उसकी शिक्षक ने जो कुछ ब्लेकबोर्ड पर लिखा था यह उसकी नकल है। यह सुनकर उसकी माँ ने बताया कि समय की अवधारणा से संबंधित समस्याओं में वह हमेशा ग़लती करती है। माँ ने यह भी बताया कि वे कई बार समझाने की कोशिश कर चुकी हैं। मगर वह अभी भी ग़लतियाँ करती रहती हैं। मैंने अपनी दोस्त से कहा कि मैं मदद करने की कोशिश करूँगी।

मैं सीता से गपशप करती रही और धीरे–धीरे बातचीत को मोड़कर घड़ी देखने पर ले आई। मैंने देखा कि वह बखूबी घड़ी पढ़ लेती है और समय की अवधारणा की भी कुछ समझ उसे है।

इसके बाद मैंने सीता से एक सवाल हल करने को कहा : 'बाजार जाने के लिए पहले मैं 15 मिनट पैदल चली। फिर मैंने ऑटो रिक्शा लिया और उसमें 25 मिनट चली तो बताओ मुझे बाजार पहुँचने में कितना समय लगा।

सीता : क्या इसके लिए मुझे 15 और 25 को जोड़कर उत्तर निकालना पड़ेगा?

मैं : इन्हें कैसे जोड़ोगी?

उसने इस तरह किया।

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 25 \\ \hline 40 \end{array}$$

40 मिनट होंगे।

मैं : तो यह बताओ कि मुझे बाजार पहुँचने में एक घण्टे से ज्यादा समय लगा या कम?

वह थोड़ी झिझकी। उसके जवाब से साफ जाहिर था कि इन संख्याओं को जोड़ते वक्त उसके दिमाग में समय का संदर्भ नहीं था।

मैं : ठीक है। चलो इन समयों को टाइमपीस पर दिखाते हैं।

मैंने उसकी माँ की टाइमपीस के दोनों कांटों को 12 पर करके 00.00 बजे पर सेट कर दिया।

मैं : मैं पैदल कितना चली?

सीता : 15 मिनट।

मैं : क्या तुम बता सकती हो कि घड़ी पर यह समय कितना होगा? (उसने मिनट वाले कांटे को 5, 10, 15 बोलते हुए धीरे–धीरे घुमाया।)

मैं : शाबाश। फिर मैं ऑटो रिक्शा से कितनी देर चली?

सीता : 25 मिनट।

मैं : तो, घड़ी पर इस कांटे को कितना और घुमाना पड़ेगा?

सीता : (थोड़ा सोचकर) 5 पॉइन्ट और घुमाना पड़ेगा क्या?

मैं : क्यों?

सीता : क्यों कि 5 × 5 = 25

मैं : टीक। चलो, पहले की तरह कांटे को घुमाते हैं। 15 के बाद आएगा 20, फिर 25, 30, 35, 40। तो यह बताता है कि बाजार पहुँचने में कुल कितना समय लगा। क्या तुम अब बता सकती हो कि मुझे बाजार पहुँचने में एक घण्टे से ज्यादा लगा या कम? देखकर बताओ।

बच्ची : एक घण्टे से कम।

मैं : क्यों?

बच्ची : क्योंकि 1 घण्टा पूरा करने के लिए कांटे को 12 तक पहुँचना चाहिए।

मैं : ठीक। अब बताओ कि 40 मिनट एक घण्टे से कितना कम है यानी 12 की स्थिति पर पहुँचने के लिए कांटे को अभी और कितना घूमना पड़ेगा?

उसने 5–5 मिनट के बाकी निशान गिनकर बताया 20।

मैं : यानी 1 घण्टा होने के लिए 20 मिनट और लगेंगे। चलो, अब देखते हैं कि 45 मिनट और 15 मिनट का जोड़ कैसे करें। मैंने 45 मिनट दिखाने के लिए उसी पिछले तर्क को दोहराया। ध्यान रखें कि 45 मिनट दिखाने के लिए मिनट के कांटे को 9 पॉइन्ट घूमना होगा। 15 मिनट और दिखाने के लिए हमें कांटे को तीन पॉइन्ट और घुमाना होगा। इस तरह से अब मिनट का कांटा 12 पर आ गया, जिसका मतलब है कि मैंने 1 घण्टा पूरा कर लिया है। यानी 45 मिनट और 15 मिनट मिलकर 1 घण्टा पूरा होता है।

इसी तरह मैंने 40 मिनट + 50 मिनट की भी चर्चा की। घड़ी का इस्तेमाल करके उसे यह बताने में कोई मुश्किल नहीं हुई कि यह 1 घण्टा 30 मिनट होगा। इसके बाद मैंने उसे कुल समय की गणना का एक और सवाल दिया मगर इसे घड़ी देखे बिना करने को कहा।

मैं : यह सवाल देखो : मान लो मैं किसी कार्यक्रम में जाऊँ जहाँ 50 मिनट नृत्य होगा और 25 मिनट का एक नाटक होगा। पूरा कार्यक्रम कुल कितने घण्टे चलेगा?

सीता : कार्यक्रम चलेगा

$$\begin{array}{r} 50 \\ +\ 25 \\ \hline 75 \\ \hline \end{array}$$

मैं : क्या यह (75 मिनट) एक घण्टे से ज्यादा है? (यह पता करने के लिए सीता ने एक घड़ी का चित्र बना लिया और मिनट के कांटे के घूमने की गिनती करके कहा)। 1 घण्टा 15 मिनट।

मैं : तुम घड़ी देखे बग़ैर कोशिश क्यों नहीं करती? चलो, देखते हैं। तुम्हें पता है कि 60 मिनट का 1 घण्टा होता है। यानी तुम्हें पता करना है कि 75 में कितनी बार 60 आएगा। यह पता करने के लिए कौन सी क्रिया करोगी?

सीता : क्या 75 ÷ 60 करना होगा?

मैं : हाँ, करके देखो।

सीता :

$$
\begin{array}{r}
60\overline{)75}\,(1 \\
\underline{60} \\
15
\end{array}
$$

1 घण्टा 15 मिनट हुआ।

मैं : यानी भागफल से घण्टे और शेष से मिनट मिल जाते हैं।

सीता : अब मैं समझ गई।

इसके बाद मैंने उसे कुछ और सवाल हल करने को दिए। उसने ये सवाल किए और उसमें ज्यादा आत्मविश्वास नजर आया।

इसके बाद मैंने खड़े जोड़ (वर्टिकल ऍडीशन) की बात की। उदाहरण के लिए, 1 घण्टा 45 मिनट और 2 घण्टा 25 मिनट को कैसे जोड़ें? मैंने इस तरह के अलग–अलग कॉलम बना लिए और लिखा :

घण्टे	मिनट
1	45
+2	25

उसने प्रत्येक कॉलम को जोड़कर 3 घण्टे 70 मिनट प्राप्त कर लिया। मैंने उसे याद दिलाया, जब भी यह संख्या 60 से ज्यादा हो तो इसको घण्टे–मिनट में बदलना चाहिए। उसने कर दिया और मिली 1 घण्टा 10 मिनट। मैंने तब उसे 1 घण्टे को घण्टे वाले कॉलम में ले जाने को कहा जिससे 3 + 1 घण्टे मिलता है। अब अपनी वर्कबुक के उस सवाल को देखो।

उसे उसी तरह करो जैसे मैंने तुम्हें बताया है। उसने कॉलम बनाकर इस तरह किया :

घण्टे	मिनट
4	55
3	52
7	107

और बताया कि उत्तर 8 घण्टे 47 मिनट है।

इसी तरह के कुछ और अभ्यासों के बाद हम दोनों को लगा कि वह घण्टे और मिनट जोड़ने का तरीका समझ गयी है।

ऊपर के उदाहरण में हमने बच्ची से पहले तो दाशमिक प्रणाली के अनुसार क्रिया करने को कहा और फिर अपने उत्तर को साठमिक प्रणाली के हिसाब से बदलने को कहा। बेशक, बच्ची के लिए यह आसान नहीं होता कि दो तरह की प्रणालियों के बीच इधर–उधर होती रहे। इसके लिए उसे पहले दोनों प्रणालियों में दक्ष होना पड़ेगा। इसके बाद ही वह समय से संबंधित सवालों को हल करने की कोशिश कर पाएगी। सवाल देने से पहले हमें इस बात की जाँच ज़रूर कर लेनी चाहिए।

ऊपर दिए गए उदाहरण में जो तरीका बताया गया उस तरीके को 'परिवर्तन विधि' कह सकते हैं। इस विधि के काफी अभ्यास के बाद आप खड़े जोड़ की विधि बता सकते हैं। खड़े जोड़ की विधि करते हुए आप उनसे कहें कि वे अपने जवाब को मिनट में बदल कर उसकी जाँच कर लें। इसका एक फायदा यह है कि अगर बच्चों को 'हासिल विधि' में कुछ दिक्कत आए तो वे 'परिवर्तन विधि' का इस्तेमाल करके अपने उत्तर की जाँच कर सकते हैं।

E11) जब एक बच्चे को यह सवाल दिया गया :

"2 घण्टे 15 मिनट

–1 घण्टा 40 मिनट"

उसने जवाब दिया 1 घण्टा 25 मिनट। उसकी दिक्कत क्या है? इस दिक्कत से निजात पाने में आप उसकी मदद कैसे करेंगे?

इस अभ्यास से लगता है कि जब भी बच्चे को सवाल दिए जाएंगे तो वह दाशमिक प्रणाली का उपयोग करने को तत्पर हो जाएगा।

इसी के साथ हम इस इकाई को खत्म करते हैं। ध्यान रखें कि यहाँ हमने 'समय' से संबंधित कुछ ही समस्याओं को उभारा है। ऐसी कई और समस्याएँ आपने देखी होंगी। हमें उम्मीद है कि इस इकाई में की गई चर्चा से आपको अन्य समस्याओं से भी इसी तरह निपटने में मदद मिलेगी।

आइए अब हम संक्षेप में देखें कि हमने इस इकाई में क्या–क्या बातें की हैं।

सारांश

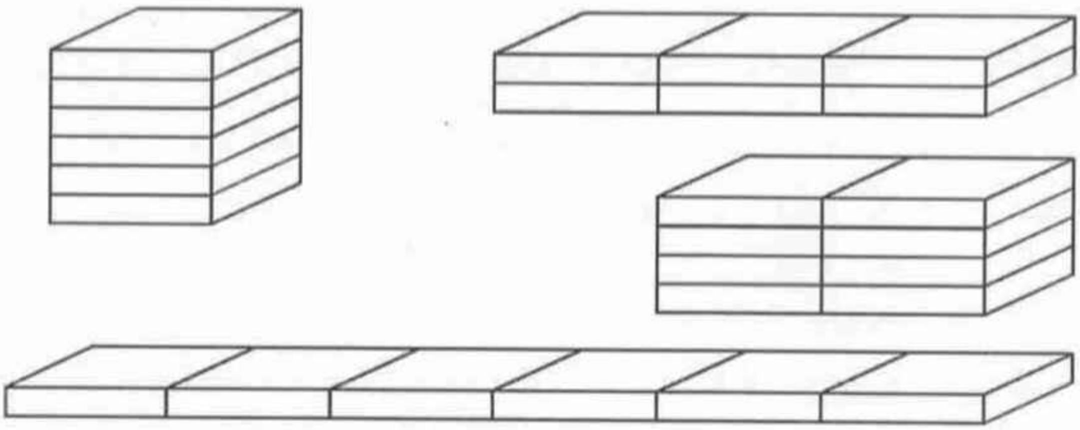
इस इकाई में हमने

- अतीत, वर्तमान और भविष्य, समय के एक क्षण और समय के एक अन्तराल, इन अवधारणाओं पर बच्चों की समझ बनाने में मददगार गतिविधियों पर भी गौर किया।
- समय से संबंधित गणितीय क्रियाएँ करते वक्त बच्चों द्वारा की जाने वाली आम ग़लतियों पर ध्यान दिया।
- बच्चों को समय की संक्रियाओं को सही तरह से करने लायक बनाने के तरीकों पर भी विचार किया।

इकाई 3 के पाठ 7, 8 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

पाठ 7 : मापन की समझ

E8 खाली माचिसों से बच्चे खंभों जैसे ढाँचे बनाएँ और माचिस की संख्या के आधार पर उनके साइज की तुलना करें। इससे उन्हें यह समझने में मदद मिलेगी कि किसी ढाँचे का साइज सिर्फ ऊँचाई के आधार पर ही नहीं नापा जाता। छः माचिसों के उपयोग से निम्नांकित ढाँचें बनाए जा सकते हैं। (चित्र 33)



चित्र 33

E9 कार्डबोर्ड के खोके, खाली माचिसें, लोहे के टुकड़े, मग, जार वगैरह वस्तुओं का उपयोग आयतन सिखाने के लिए किया जा सकता है।

E10 एक बर्तन में पानी भरकर उसे दूसरे में उड़ेलना या एक खोके में रेत भरकर दूसरे में उड़ेलना जैसी क्रियाएँ कक्षा 6 के बच्चों को मज़ेदार गतिविधियाँ लगेंगी और इनसे बच्चों को यह भी देखने में मदद मिलेगी कि बड़े बर्तन में ज्यादा वस्तु भरी जा सकती है।

E11 दी गई परिस्थिति से पता चलता है कि बच्चों में आयतन और धारिता को लेकर क्या–क्या गलतफहमियाँ हैं। विकल्प 1) और 2) सही हैं।

E12 सबसे पहला कदम तो यह दिखाना होगा कि बर्तन का आकार चाहे जैसा हो, उसमें सामने वाले तरल पदार्थ की मात्रा/आयतन वही रहता है। अवलोकन द्वारा या एक बर्तन का पदार्थ दूसरे में डालकर धारिताओं की तुलना करना अगला कदम है। इसके बाद नम्बर आता है मानक इकाई के रूप में धारिता नापने का।

पाठ 8 : समय का मापन

E1 मसलन वे 'एक सेकण्ड में' 'पांच मिनट में', 'एक बार' (अतीत की किसी बात के संदर्भ में), तेज, धीमा वगैरह मुहावरों का इस्तेमाल करते हैं।

E2 कुछ सकारात्मक पहलुओं की चर्चा तो हम इकाई में कर ही चुके हैं। आप और जोड़ सकते हैं। जहाँ बच्चे संख्या रेखा के उपयोग से बखूबी परिचित न हों, वहाँ समय रेखा का उपयोग इतना कारगर नहीं होता। कई बार तो वे इससे भ्रमित भी हो सकते हैं। ऐसे मामलों में यह साधन उनके सामने सावधानी से और सिलसिलेवार ढंग से रखा जाना चाहिए।

चरण 1 : 5 कार्ड बनाएँ जिनमें सिर्फ एक चीज– तारीख, महीना या साल– ही बदलें। बतौर उदाहरण

5 जून 1992	7 जून 192	29 जून, 1992	23 जून 1992	10 जून 1992

बच्चों से इन्हें क्रम में जमाने को कहें।

ध्यान दें कि इन कार्डों में सिर्फ तारीखक बदली है, जबकि महीना व साल एक ही है। ऐसे कार्ड भी बनाएं जा सकते हैं जिनमें या तो सिर्फ महीना बदलें या सिर्फ साल बदलें।

चरण 2 : पाँच कार्ड ऐसे बनाइए जिनमें दो चीज़ें बदलते हों। बतौर उदाहरण–

15 अप्रैल, 1983	15 दिसम्बर 1980	15 जुलाई, 1993	15 मार्च 195	15 सितम्बर 1989

बच्चों से कहें कि इन्हें भी पहले–बाद के क्रम में जमाएँ।

चरण 3 : पाँच कार्ड ऐसे बनाइए जिनमें तीनों चीजें बदलती हों। बच्चों से कहिए कि इन्हें भी चरण 1 व 2 की तरह क्रम में जमाएँ।

आप जो भी गतिविधि सोचें इसें ऊपर दिए हुए चरणों में करना होगा।

E5 एक गतिविधि इस तरह हो सकती है।

बच्ची से कहिए कि वह अपने दिन भर के क्रियाकलापों की एक सूची बनाएँ और साथ में यह लिखें कि वह कौन सा काम किस वक्त करती है।

इसकी समझ की जाँच करने के लिए जरूरी होगा कि आप उसे कई अभ्यास दें। मसलन आप उसे इस तरह के अभ्यास भी दे सकते हैं :

(क) उसे समयों का एक क्रम दीजिए, जैसे

11,10 ,20, 1.40, ...

उसे पैटर्न देखकर इसी क्रम में तीन और समय लिखने को कहिए।

एक अन्य क्रम ऐसा हो सकता है जिसमें समय का अंतराल बदलता जाता है जैसे नीचे दिए गये क्रम में 20 मिनट, 40 मिनट, 60 मिनट हैं।

10, 10, 20, 11.00, 12.00, ...

(ख) आप उससे ऐसे सवाल भी पूछ सकते हैं कि "अगर मैं 9 बजे सुबह उठा और 12 घंटे बाद सो गया, तो बताओ कि मैं कितने बजे सोया"?

E6 आप बच्चों को किसी हॉल या मैदान में ले जाएँ जहाँ प्रारम्भिक व अंतिम रेखा के निशान लगे हों। ये रेखाएँ कुछ इस तरह खींची जानी चाहिए कि उस उम्र में एक औसत बच्चे को इनके बीच दौड़ने में 1 मिनट का समय लगे। अब आप बच्चों से कहिए कि उन्हें प्रारंभ रेखा से अंतिम रेखा तक इस तरह दौड़ना है कि 2 मिनट का समय लगे।क जिन बच्चों को दौड़ने में 2 मिनट के सबसे नजदीक वक्त लगेगा, वह विजयी होगा। जो बच्चे दौड़ नहीं रहे हैं, वे यह चर्चा कर सकते हैं कि दौड़ने वाले बच्चे ने ज्यादा या कम वक्त लगाया।

E8 बच्चों को पाँच टोलियों में बाँटा जा सकता है। आप 25 कार्ड बना लें जिन पर 24 घंटा प्रणाली में समय लिखे हों। 25 अन्य कार्ड ऐसे बनाएं जिन पर सामान्य रीति से समय लिखे हों। पहले सेट में से प्रत्येक टोली को 5–5 कार्ड दे दीजिए। दूसरा सेट मेज पर रख दें। इसमें से एक कार्ड उठाकर सब बच्चों को दिखाइए। मान लीजिए इस पर 1.30 दोपहर समय लिखा हो। तो जिस टोली के पास इससे मेल खाता 24 घंटा प्रणाली में लिखा समय (13.30) हो, वह अपने उस कार्ड को दिखाए गए कार्ड के ऊपर रख दे। इस तरह से वह टोली अपने एक कार्ड से निजात पाएगी। इसके बाद अगला कार्ड उठाइए और खेल चलने दीजिए। हर बारी उन्हें 1 मिनट का समय दीजिए। इसके बाद वे अपने कार्ड से निजात पाने का मौका गंवा देंगे। जिस टोली के कार्ड सबसे पहले खत्म होगी, वह जीतेगी।

E9 यह सुनिश्चित कर लें कि बच्चे को यह पता है कि समय का मापन साठमिक प्रणाली से होता है। इसके लिए आप इकाई में सुझाई गई कई गतिविधियों का सहारा ले सकते हैं। जब वह यह बात समझ जाए, तो आप उसे समय से संबंधित कई सवाल दे सकते हैं। जब वह गलती करे, तो आप उसे याद दिला सकते हैं कि यह किस तरह दाशमिक प्रणाली से अलग है।

E10 आयोजक ने गलती से 240 मिनट को 2 घंटा 40 मिनट मान लिया। वास्तव में यह 240 / 60 = 4 घंटे रखना होगा।

यह गलती काफी आम है। कारण यह है कि रुपये पैसे या वजन मापन आदि में लोग दाशमिक प्रणाली के आदी हो जाते हैं

E11 दिक्कत यह है कि उसने क्रम की चिंता किए बगैर घंटे व मिनट का अंतर निकालकर रख दिया है। सबसे पहले तो हमें उसको यकीन दिलाना होगा कि उसका उत्तर गलत है। यह निम्नलिखित तरीके से किया जा सकता है।

सबसे पहले उससे घड़ी पर 1.40 दिखाने को कहिए। अब उससे कहिए कि व घड़ी के कांटों को तब तक घुमाए जब तक कि घड़ी में 2.15 का समय न हो जाए। उससे साथ–साथ यह गिनने को कहिए कि मिनट का कांटा कितने मिनट घूमा। वह अपनी गलती पहचान जाएगी। परन्तु मुख्य समस्या यह है कि वह दाशमिक प्रणाली में घटाना भी नहीं जानती। इसके लिए जरूरी होगा कि आप उसे इकाई 7 व इकाई 15 में सुझाई गई गतिविधियाँ कराएँ।

इकाई – 4

गणित सीखना–सिखाना व गतिविधियाँ

पाठ – 9 गतिविधियों से सीखना

गतिविधि माने क्या – गतिविधि का स्कीमा – गतिविधि और सीखना – किस तरह की गतिविधियों से सीख सकते हैं – कक्षा में की जा रही गतिविधियों के कुछ उदाहरण – गतिविधि आधारित गणित की कक्षा।

पाठ – 10 सीखने की प्रक्रिया पर विभिन्न विचार

सीखने का माडल बनाना – सीखना यानि रटना (बैंकिग मॉडल) – सीखना यानि प्रोग्रामिंग – सीखना यानि समझ का निर्माण।

पाठ – 11 शिक्षण की प्रचलित प्रथाएँ

शिक्षण की प्रचलित प्रथाएँ – कक्षा में रचनावाद – आकलन

पाठ – 12 निरूपण

– अमूर्त सोच का विकास – अवधारणात्मक व प्रक्रियात्मक ज्ञान।

सीखना किसे कहते हैं, इसे लेकर हम सभी की अपनी एक धारणा होती है। बतौर शिक्षक हम कक्षा में क्या करेंगे, यह हमारे सीखने की प्रक्रिया की समझ तथा सीखने वाले (बच्चे) के बारे में हमारी सोच पर निर्भर करता है। हमारे दिमाग में सीखने की प्रक्रिया का मॉडल होता है जिसके आधार पर हम पाठ योजना बनाते हैं इस मॉडल का असर इस बात पर भी पड़ता है कि बच्चों तक बात पहुँचाने का तरीका क्या है? जैसे– गणित के कुछ शिक्षक मानते हो कि बच्चों को एक ही वस्तु को बार–बार दोहराने में मजा आता है और वे चाहते हैं कि उन्हें सवाल करने का सही तरीका बता दिया जाए। कुछ शिक्षक मानते हैं कि बच्चों को सारे मुश्किल सवालों के जवाब आने चाहिए और उन्हें कुछ सवालों को हल करने की सबसे अच्छी व सबसे छोटी विधि भी पता होनी चाहिए। कोई शिक्षक मानते हो कि बच्चों को मौका मिलना चाहिए कि वे सवाल खुद हल करे और बताए कि उन्होंने सवाल कैसे हल किया।

इस इकाई में हमने सीखने के बैंकिंग, प्रोग्रामिंग व रचनावादी मॉडल के बारे में बताया गया है। साथ ही कक्षा में रचनावाद कैसे लाया जा सकता है तथा आकलन, निरूपण पर चर्चा की गई है।

पाठ – 9

गतिविधियों से सीखना

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- गतिविधि माने क्या?
- गतिविधि और सीखना
- गतिविधियों का विश्लेषण
- सारांश

परिचय

हम सभी मानते हैं कि बच्चे गणित तभी सीख सकते हैं जब उन्हें खोजबीन करने व अपने विचार व्यक्त करने की पूरी छूट मिले। प्रत्येक कक्षा में बच्चों को यही करने का अवसर दिया जाना चाहिए। इसके लिए हमें अपनी कक्षाओं को गतिविधि–आधारित बनाना होगा।

इस पाठ में हम कुछ ऐसे कार्यों व गतिविधियों को जो बच्चों को सोचने व अवधारणाओं की अपनी समझ बनाने का अवसर देती है। तथा हम किसे गतिविधि माने कई नए सवालों को हल करने को, ठोस वस्तुओं का उपयोग को या कागज़–पेंसिल कार्य को? साथ ही हम कक्षा में गतिविधि आधारित सीखने का माहौल बनाने के तरीकों पर विचार करेंगे।

उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- 'गतिविधि' शब्द के अलग–अलग इस्तेमालों के बीच फर्क बता पाएँगे।
- किसी गतिविधि की संरचना, विषयवस्तु और लक्ष्यों का विश्लेषण कर पाएँगे।
- सीखने के लिए दिए गए उन कार्यों को पहचान पाएँगे जिन्हें गतिविधि माना जा सकता है और जिन्हें नहीं माना जा सकता।
- गणित सीखने की औपचारिक प्रक्रिया में सहायता के लिए उपयुक्त गतिविधियाँ बना सकेंगे या चुन सकेंगे।

गतिविधि क्या? माने

चित्र 1 : गतिविधियों को करते हुए बच्चे

गतिविधि

- याद करना
- रटकर नियम सीखना
- बार–बार बोल–बोल कर दोहराना
- नकल उतारना
- शिक्षक द्वारा प्रदर्शन

- किसी अमूर्त अवधारणा/प्रक्रिया को ठोस रूप देने के लिए सामग्री का उपयोग हो सकता है।
- किसी 'साधन' का उपयोग हो सकता है।
- कोई खेल हो सकता है।
- कोई 'अनुभव' हो सकता है। (वास्तविक जीवन से या कोई और)
- इसमें खेलकूद शामिल हो सकता है।
- हो सकता है कि इसमें कोई भागदौड़/उठ बैठ न हो।

गतिविधि

- रोचक
- सार्थक
- कई तरह के हुनर/ क्षमताओं को आज़माने के लिए अवसर
- चुनौती व संघर्ष
- सोचने की गुंजाइश
- बच्ची अकेली
- शिक्षक और एक बच्ची या बच्चों का छोटा समूह
- बच्चों के एक या ज्यादा समूह
- शिक्षक और पूरी कक्षा
- बच्चे और उनके आसपास के लोग

- संघर्ष की शुरुआत करवाना।
- किसी अवधारणा/प्रक्रिया का अभ्यास।
- किसी क्षमता (जैसे घटाना) के विकास के लिए अभ्यास।
- किसी अवधारणा का मूर्त रूप में प्रस्तुतिकरण।
- किसी विचार की 'ज़रूरत' को महसूस करना। (जैसे मानक इकाई, संख्याओं के मानक प्रतीक, जरूरत जो प्रायः सामाजिक परिवेश से उभरे)
- स्कीम/स्कीमा के विस्तार के अवसर प्रदान करना।
- नई प्रक्रियाएँ, हुनर व तरीके विकसित करने के या बनाने के अवसर प्रदान करना।

चित्र 2 : गतिविधि की स्कीमा

इसे देखने के बाद उन विभिन्न गतिविधियों के बारे में सोचिए जिन्हें आपने पढ़ा है या बच्चों के साथ करवाया। शब्द को देखकर इतना तो पता चलता है कि इसमें 'कुछ करना' शामिल है– हाथों व वस्तुओं के साथ, काग़ज–पेंसिल से या स्वयं के दिमाग में हो सकता है। इस प्रकार हर तरह की क्रिया से व्यक्ति को सीखने में मदद मिलती है।

मेरे दोस्त का कहना है कि कोई भी सीखने का कार्य जिसमें सीखने वाला निष्क्रिय न हो, गतिविधि है चित्र 1 में सीखने की प्रक्रिया में सक्रियता से सीखने वाले की छवि उभरती है। जैसे– खेल के दौरान बच्चे जो भी करते हैं उसमें सक्रिय रहते हैं। वे अपने टीम और विरोधियों के टीम में क्या–क्या चल रहा है उसमें गहरी रुचि रखते हैं। दरअसल कोई भी बच्ची हर उस कार्य में सक्रिय रुचि लेगी जो उसे सार्थक लगे। जब वह कोई किताब पढ़ती है जिसमें उसे रुचि है, तो वह उसमें दिए गए विचारों को समझने में व्यस्त रहती है। इसलिए किताब पढ़ना भी ऐसी स्थिति में गतिविधि है क्योंकि बच्ची निष्क्रिय रूप से नहीं पढ़ रही। अर्थात्, कोई भी 'क्रिया' जो सीखने में मददगार नहीं होती, उसे हम गतिविधि नहीं कहेंगे।

E1) उदाहरण सहित समझाइए कि 'याद करने' और 'रटकर नियम सीखना' गतिविधि नहीं है?

E2) तीन–तीन ऐसे कार्यों की सूची बनाइए जिनको करके शिक्षक बच्चों को सक्रिय/निष्क्रिय सीखने वाले बनने के लिए प्रोत्साहित कर सकते हैं?

गतिविधि और सीखना

गतिविधियों के दौरान पूर्व ज्ञान व क्षमताएँ, बच्चों की सीखने में कई तरह से मदद करती हैं। और विभिन्न गणितीय क्षमताएँ विकसित करने में मदद के लिए बच्ची को उपयुक्त गतिविधियों की ज़रूरत होती है। गणितीय क्षमताओं में गणितीय तर्क, अमूर्त वस्तुओं के बीच अंत : संबंध खोजना, अमूर्त वस्तुओं पर क्रिया करना, व्यापकीकरण व विशिष्टीकरण, अनुमान लगाना और भी कुछ क्षमताएँ शामिल है। बच्ची को इन क्षमताओं के विकास व उपयोग के लिए अवसरों की ज़रूरत होती है। यदि गतिविधियाँ इस लक्ष्य के अनुरूप बनाई गई है तो इनसे बच्ची को गणित सीखने में अवश्य मदद मिलेगी। इस प्रकार छोटी बच्ची ठोस गतिविधियों के ज़रिए ही गणितीय अवधारणा का अपना स्कीमा निर्मित करती है। किसी अवधारणा का अन्य गणितीय वस्तुों के साथ जितने ज्यादा संबंध वह देख पाएगी उतना ही उस अवधारणा का उसका स्कीमा विस्तृत होगा।

धीरे–धीरे बच्चे ऐसी गतिविधियों के माध्यम से अमूर्त की ओर बढ़ते हैं जिनमें उन्हें विभिन्न गणितीय अवधारणाओं की खोजबीन अमूर्त रूप में करने के अवसर मिले। जैसे, किसी बच्ची को अभाज्य संख्या (जिसमें सिर्फ़ स्वयं का अथवा 1 का भाग जाता हो) की अपनी समझ विकसित करने के लिए संख्या, भाग, भाज्यता आदि अवधारणाओं की खोजबीन करनी होगी। उसे कुछ विशिष्ट उदाहरण देखने और उनसे व्यापकीकरण का प्रयास करना होगा। हो सकता है कि इस प्रक्रिया के दौरान वह कई गलत व्यापकीकरण कथन सोचे व फिर उन्हें खारिज कर दे। जैसे– वह शायद इस बात पर विचार करे कि विषम संख्या अभाज्य होती है या नहीं, या फिर हर अभाज्य संख्या, विषम होती है या नहीं। इस प्रक्रिया में मदद के लिए जरूरी होगा कि बच्ची को सोच समझकर चुनी गई गतिविधियां दी जाएं जो इस खोज में उसका जोश व रुचि बनाए रख सकें। ये वास्तविक जीवन से जुड़े सवाल, पहेलियां या ऐसा कोई भी कार्य हो सकता है जिसमें बच्ची की रूचि हो। शिक्षक की यहीं ज़रूरत होती है– उपयुक्त गतिविधियों को चुनने की न कि बच्ची को किसी अवधारणा के बारे में मात्र पाठ्यपुस्तक में से पढ़ने और एक ही जैसे सवालों को करवाते रहने के लिए।

अब हम देखें कि किसी गतिविधि को दूसरी ओर से बेहतर बनाने वाले तत्व कौन–कौन से होते हैं?

किस तरह की गतिविधि से सीख सकते हैं?

कक्षा 2 के एक गणित शिक्षक जावेद ने गर्व से लोगों के एक समूह को बताया कि वह हमेशा 'गतिविधि के तरीके' से पढ़ाता है। जब समझाने को कहा गया तो उसने बताया, "मैं एक बच्ची को बोर्ड पर बुलाकर उससे पाठ्पुस्तक में दिए सवाल हल करने को कहता हूं। बाकी बच्चे उसे उतार लेते हैं और जो भी लिखते हैं उसे ज़ोर–ज़ोर से बोलते भी जाते हैं।" क्या यह 'गतिविधि' से शिक्षण का तरीका है? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमें देखना होगा कि गतिविधि के कौन से लक्षणों से सीखने में मदद मिलती है।

हमे कोई भी गतिविधि बनाते समय खुद से ये सवाल पूछने चाहिए।

(1) यह गणित के किस क्षेत्र (जैसे संख्या, आकृति, आंकड़ों को सम्भालने, आदि) से संबंधित है?

(2) इसका उद्देश्य क्या है? (जैसे अनुभव प्रदान करना, विश्लेषण, खोज–बीन, सवाल हल करना, किसी अमूर्तीकरण को ठोस रूप देना, आदि)

(3) बच्चों की किस स्तर की भागीदारी है? (सक्रिय रूप से, क्या निजी तौर पर टोली में हैं?)

(4) किन सामग्रियों का उपयोग किया जा रहा है? (जैसे कंचे, तीलियों, पेन और कागज़, चॉक और बोर्ड)

(5) क्या इसमें लिखित कार्य शामिल है या सम्भव है?

इस तरह के कई और प्रश्न हैं जो पूछे जाने चाहिए।

E3) दो ऐसी चुनौतिपूर्ण गतिविधियाँ बनाइए जिनमें बच्ची अभाज्य संख्याओं का अभ्यास करे।

E4) अपने विद्यार्थियों के लिए गतिविधियाँ बनाते समय इन के अलावा और कौन से प्रश्न पूछ सकते हैं?

कक्षा में की जा रही गतिविधियों के कुछ उदाहरण

उदाहरण 1 : कक्षा 2 में कला व हस्तकला का सत्र चल रहा था। शिक्षक ने हाल ही में बच्चों को सिखाया था कि कि कागज़ पर गिरी स्याही की बूँद को फूँककर चित्र कैसे बनाते हैं। एक बच्ची ने बूँद को फूँककर पेड़ बना लिया। दूसरे ने चिल्लाकर कहा, "देखो, मैंने तिकोन बनाया है।" शिक्षक ने हामी भरी और वह चित्र अन्य बच्चों को दिखाकर पूछा, "क्या कोई और तिकोन बना सकता है?"

चित्र 2 : स्याही की बूँद से आकृति बनाते बच्ची का चित्र

अब और बच्चे तिकोन बनाने में भिड़ गए। शिक्षक ने उन्हें वर्ग, आयात, वृत्त, आदि बनाने को भी प्रोत्साहित किया।

कुछ बच्चों ने पाँच भुजाओं वाली आकृतियाँ बनाई। शिक्षक ने एक से पूछा कि वे इन आकृतियों को आयत कह सकते हैं या नहीं। कुछ देर चर्चा के बाद बच्चों ने निष्कर्ष निकाला कि ये आयत नहीं हैं। इसके बाद शिक्षक ने थोड़ी देर इन्तज़ार किया ताकि प्रत्येक बच्चे 4–5 आकृतियाँ बना लें। तब उसने सुझाव दिया कि वे इन आकृतियों के चारों ओर रेखाएं खींचकर इन्हें आस–पास की वस्तुओं के चित्रों में बदल लें और अपने चित्रों में रंग भर लें।

एक सप्ताह बाद हस्तकला के अगले सत्र में शिक्षक ने प्रत्येक बच्ची को एक–एक आकृति का कार्ड दिया। उसने उनसे स्याही फूंकने की कला का उपयोग करके वैसी ही आकृति बनाने को कहा।

उदाहरण 1 में शिक्षक ने अपनी कला की कक्षा में आकृति वाला अभ्यास करवाना तय नहीं किया था। लेकिन, जब मौका सामने दिखा तो उसने इसका फायदा उठाया। चूंकि यह गतिविधि, बच्चे जो कुछ कर रहे

थे उसमें से निकली थी और एक तरह से उनकी पहल पर शुरू हुई थी, इसलिए उनकी रुचि इसमें बनी रही। ज़ाहिर है, सिर्फ़ आकृतियों को 'अनुभव' नहीं कर रहे थे। वे कुछ आकृतियों के नाम तो पहले से ही जानते थे और उन्हें पहचान सकते थे, 'बना' सकते थे। इस गतिविधि का ज़ोर विभिन्न आकृतियों की औपचारिक परिभाषा पर नहीं बल्कि सहज रूप से उनके गुणधर्म पहचानने पर था। कई सरल रेखाओं को जोड़कर एक वृत्त, अर्थात्– n- भुजा वाला बहुभुज बनाने की दिशा में सोच की तरफ शायद बढ़े थे। 'गतिविधि' में 'नई' आकृतियां बनाने व उनकी छानबीन करने के भी अवसर थे। और एक महत्त्वपूर्ण बात यह है कि शिक्षक अगली कक्षा में इस गतिविधि को पुनः उठाने की बात भूली नहीं।

E5) आकृतियों के गुणधर्म समझाने के लिए एक गतिविधि बनाइए।

गतिविधियों का विश्लेषण

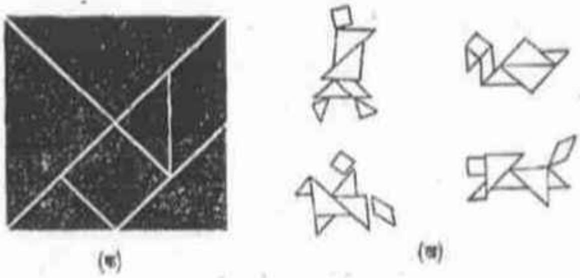
गतिविधि 1 (आकृतियां बनाना) : कक्षा में बच्चों को 4–5 की टोलियों में बांट दिया जाता है। शिक्षक के पास कार्ड्स की एक गड्डी है। कुछ कार्ड्स पर आकृतियों के नाम है जबकि शेष कार्ड्स पर आकृतियों के चित्र है। वह गड्डी को पीसती है और फिर एक–एक कार्ड खींचती है। बारी–बारी से वह प्रत्येक टोली से उस कार्ड पर इंगित आकृति माचिस की तीलियों से बनाने को कहती है। एक ही आकृति एक से ज़्यादा कार्ड पर आ सकती है किन्तु टोलियां उन्हें बनाने का तरीका नहीं दोहरा सकती। प्रत्येक सही प्रस्तुतिकरण पर अंक भी दिए जा सकते हैं।

यह गतिविधि आकृतियों से संबंधित है। इस गतिविधि को एक खेल के रूप में ढाला गया है। यह कोई पारम्परिक खेल नहीं है और इसे नेतृत्व (जैसे शिक्षक) के बिना नहीं खेला जा सकता। इस खेल का उद्देश्य है बच्चों में उपलब्ध सहज अथवा औपचारिक ज्ञान के आधार पर उनमें विभिन्न आकृतियों का अवधारणात्मक ज्ञान विकसित करना। पूरी कक्षा सारे समय खेल में शामिल होती है क्योंकि वे एक–दूसरे की गलतियां देखते हैं और उन्हें यह भी याद रखना होता है कि अन्य टोलियों ने कोई आकृति कैसे बनाई थी। ज्ञान के इस 'सार्वजनिक प्रदर्शन' से एक–दूसरे से सीखने की गुंजाइश मिलती है।

सामग्री के लिहाज़ से इस गतिविधि में आकृति के नाम लिखे कार्ड्स की ज़रूरत है। लेकिन इसे बदला भी जा सकता है। अतः इसके लिए किसी विशिष्ट सामग्री की ज़रूरत नहीं है। दरअसल शिक्षक बच्चों से कह सकती है कि वे सामग्री और खेल के नियमों, दोनों में कुछ बदलाव लाने के ढंग सोचे।

कुल मिलाकर गतिविधि बाल–केन्द्रित है और सारे बच्चों में रुचि बनाए रख सकती है। यह बच्चों को विभिन्न अवधारणाएँ समझाने में उपयोगी हो सकती है।

गतिविधि 2 (टैनग्राम) : बच्चे टुकड़ों को जमा–जमाकर विभिन्न आकृतियां बना सकते हैं (चित्रानुसार)।



(क) (ख)

चित्र 3 : (क) एक टैनग्राम (ख) टैनग्राम से बनी कुछ आकृतियां

इस गतिविधि में अत्यंत सहज और अनुभवी स्तर पर आकृतियों की खोजबीन होती है। इस गतिविधि को बच्चे तब भी कर सकते हैं जब उन्हें संबंधित आकृतियों के बारे में कुछ मालूम हो हालांकि आकृतियों का छोटे हिस्सों में तोड़ना और जोड़ना गतिविधि के हर चरण पर है। यह प्रत्येक बच्ची स्वयं अपने हिसाब से कर सकती है। या यह भी हो सकता है कि शिक्षक कुछ लक्ष्य तय कर दें, और ज़रूरत हो तो कुछ सुराग दे दे और बनाने की कुछ तरकीब दिखा दे। खोजबीन में एक सतत् चुनौती बनाए रखकर शिक्षक इस गतिविधि में सब बच्चों को लगाए रख सकती है। इस गतिविधि में लिखित कार्य या शारीरिक अभ्यास भी जोड़े जा सकते हैं। सामग्री की उपलब्धता के लिए, बड़े बच्चे कार्ड बोर्ड काटकर टैनग्राम बना सकते हैं।

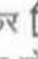
गतिविधि 3(क्या खिसकता है? क्या लुढ़कता है?) : इस गतिविधि के लिए आपको एक सपाट तख़्ता और विभिन्न आकृतियों वाली कई वस्तुओं की ज़रूरत होगी। ये वस्तुएँ पेंसिल, पावडर के छोटे डिब्बे, धागे की गटठी (रील), कंचे, शार्पनर, किताब आदि हो सकती है। किताबों की मदद से बोर्ड को फिसलपट्टी की तरह रख दिया जाता है। बच्चे वस्तुों को एक–एक करके उठाते हैं और अनुमान से बताते हैं कि यह बोर्ड पर से लुढ़केंगी या फिसलेंगी। अब किसी एक वस्तु को बोर्ड पर रखा जाता है। आकृति के अनुसार यह वस्तु फिसल अथवा लुढ़क सकती है। यह इस बात पर भी निर्भर करेगा कि उसकी किस सतह को बोर्ड पर रखा गया है। अर्थात् एक ही वस्तु, रखने की सतह के आधार पर, कभी फिसल सकती है तो कभी लुढ़क सकती है।

वस्तु	फिसलती है	लुढ़कती है
पावडर का डिब्बा	✓	
कंचा		✓
.		
.		
.	.	
सिर्फ फिसलती है	**सिर्फ लुढ़कती है**	**फिसलती व लुढ़कती है**
शार्पनर	कंचा	पावडर का डिब्बा
.	.	.
.	.	.
.	.	.

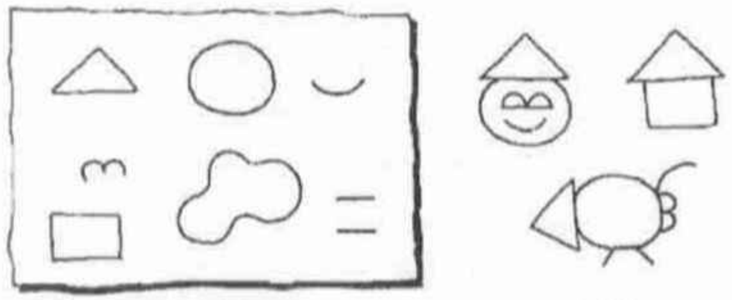
चित्र 4

बच्चे अपने प्रयोग के परिणाम वर्कशीट पर बनी बनाई गई तालिका में रिकार्ड करते हैं (चित्र 4) गतिविधि के अन्त में शिक्षक की मदद से बच्चे विभिन्न वस्तुों की सतहों के गुणधर्म का विश्लेषण करते हैं, जैसे कौन सी वस्तु फिसलती है और क्यों ?

यह गतिविधि प्रयोग करने, अवलोकन रिकार्ड करने तथा विश्लेषण पर आधारित है। इसे पूर्ण तभी कहा जा सकता है जब सारे चरण पूरे हो जाएं और विद्यार्थी अपने अवलोकनों के आधार पर कुछ व्यापक निष्कर्ष निकालने का प्रयास करे। इस गतिविधि का मकसद 'गोलाकार सतह' और 'सपाट सतह' की अवधारणाओं को ठोस रूप में प्रस्तुत करना है। (जैसे– किसी बेलनाकार (cylindrical) डिब्बे का पेंदा तो सपाट सतह है जबकि इसकी बाजूएँ वक्र सतह हैं) और बच्चों में गणितीय तर्क शक्ति को विकसित करना है। सामग्री में इस गतिविधि के लिए तालिकाएं व उपयुक्त आकृतियों वाली वस्तुओं की ज़रूरत है।

गतिविधि 4 (आकृतियों को मिलाना) : बोर्ड पर कई सारी एक–व दो विमीय सरल आकृतियां बना दी जाती हैं (चित्र 5)। बच्चों से कहा जाता है कि वे इनमें से दो या दो से अधिक आकृतियों को मिलाकर किसी वास्तविक वस्तु का चित्र तैयार करें। एक चित्र में एक आकृति का उपयोग एक ही बार किया जा सकता है। जैसे– △ व □ को मिलाकर  (झोपड़ी) बन सकती है। बच्चों से अधिक से अधिक चित्र सोचने को कहा जाता है। यह काम अकेले अथवा टोली में कर सकते हैं। अंत में प्रत्येक द्वारा किया गया काम ब्लैक बोर्ड पर दिया जाता है। प्रत्येक बच्ची आकर ब्लैक बोर्ड पर एक चित्र बनाती है। शेष बच्चे प्रत्येक चित्र की जाँच करते हैं और देखते हैं कि इसमें खेल के नियमों का पालन हुआ है या नहीं ?

इस गतिविधि में आप चाहें तो इसके नियम बदल सकते हैं– कम से कम चार मूल आकृतियों का उपयोग अवश्य हो या नयी मूल आकृतियाँ जोड़ सकते हैं।



(क) (ख)

चित्र 5 : (क) कुछ मूल आकृतियाँ (ख) मूल आकृतियों को जोड़कर बनी कुछ आकृतियां

इस गतिविधि का मकसद यह अमूर्त हुनर विकसित करना है, कि बच्ची यह सोच पाए कि घुमाए जाने पर या खिसकाए जाने पर कोई आकृति कैसी दिखेगी ?

E6) यह उस कार्य से अलग है जिसमें बच्चे ठोस वस्तुएँ लेकर उन्हें एक–दूसरे में फिट करके नई आकृतियाँ बनाते हैं। कैसे?

E7) उपरोक्त चारों गतिविधियों में से प्रत्येक के लिए दो परिवर्तन या विस्तार सुझाइए व इन परिवर्तन से गतिविधियों के उद्देश्य क्या होंगे?

इस प्रकार हमने आकृतियों को अनुभव करने से सम्बन्धित सीखने के कार्यों के चार अलग–अलग प्रकार देखे। इनका स्वरूप, विषयवस्तु या संरचना एक जैसी है इनमें से कुछ तो पाठ्यक्रम के उद्देश्यों से सीधे जुड़े हैं। इनमें से किसी भी कार्य के लिए विशेष सामग्री की ज़रूरत नहीं है। सभी की रचना इस तरह की गई है कि विद्यार्थी का मन गणित करने में लगाया जा सकता है– कुछ खेल द्वारा, तो कुछ चुनौतियाँ प्रस्तुत करके व जिज्ञासा जगा कर। सभी में अलग–अलग स्तर तक विद्यार्थी की पहल और नियंत्रण की सम्भावना है सभी में स्कैफोल्डिंग की गुंजाइश है।

स्कैफोल्डिंग : छत डालने के लिए बनाया गया लकड़ी का ढाँचा जिसे छत पक्की हो जाने पर हटा लिया जाता है।

संख्या संबंधी गतिविधियाँ

क) बूझो तो जाने

शिक्षक बच्चों से पहेलियां पूछती है। इन पहेलियों के उत्तर संख्या के रूप में हैं।

- मैं दो से एक कम और शून्य से एक ज्यादा हूं। मैं कौन हूं?
- मैं दो से दो कम और तीन से तीन कम हूं। मैं कौन हूं?

जब बच्चे ऐसी कई पहेलियों के जवाब दे चुकें, तो शिक्षक उन्हें खुद अपनी पहेलियां बनाने को प्रोत्साहित करती है। फिर कक्षा को दो समूहों में बांट दिया जाता है। अब एक समूह की कोई बच्ची उठकर अपनी बनाई

पहेली पूछती है और दूसरा समूह इसका उत्तर देने की कोशिश करता है। फिर दूसरे समूह की पहेली पूछने की बारी आती है। स्कोर ब्लैक बोर्ड पर लिखा जा सकता है। पूरी कक्षा गलतियों की ताक में लगातार नज़र रखती है। बच्चों से यह भी कहा जा सकता है कि जो संख्या वे बूझ लें उसे अंकों में लिख भी दें।

ख) बड़ी संख्याओं का चार्ट

शिक्षक प्रत्येक टोली को एक चार्ट दे सकती है, जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

10	....		90	100
110	120			
210				
410				
510				
610				
810				
910			990	1000

अब वह उनसे प्रश्न पूछती है, जैसे

1. चार्ट में छूटी हुई संख्याएं भरो।
2. 300 के बाईं ओर कौन सी संख्या है?
3. 520 से शुरू करके इसके तीन स्थान नीचे व चार स्थान दाहिने की संख्या बताओ।
4. 4 संख्याओं को घेरती एक खिड़की बनाओ (चित्र 6)। विकर्णों पर जो संख्याएं है, उनका जोड़ पता करो।

110	120
210	220

चित्र 6

5. 9 संख्याओं की एक खिड़की बनाओ। विकर्णों के सिरों की संख्याओं का जोड़ पता करो जैसे –(चित्र 7) में 410 + 630 और 610 + 430.

   क्या ऐसे सारे जोड़ बराबर हैं? क्यों?

410	420	430
510	520	530
610	620	630

चित्र 7

6. इसी तरह के और पहेलियां बनाकर अपने दोस्तों के साथ खेलो।

ग) कोष्ठक

बच्चों के दो दल बनाए जा सकते हैं। ये दल एक–दूसरे को सवाल करने को दे सकते हैं, जैसे नीचे बताए गए हैं। या ऐसा भी किया जा सकता है कि सवाल एक वर्कशीट के रूप में हों, और बच्चे इन्हें अकेले या जोड़ियों में करें।

हल करो : (6+2) x 8 = ________

12 - (3-2) = ________

निम्नलिखित सवालों में अलग–अलग स्थानों पर कोष्ठक लगाओ और हल करो–

(i) 1 + 3 x 7 = ______

1 + 3 x 7 = ______

(ii) 2 x 16è100 + $\frac{1}{2}$ = ______

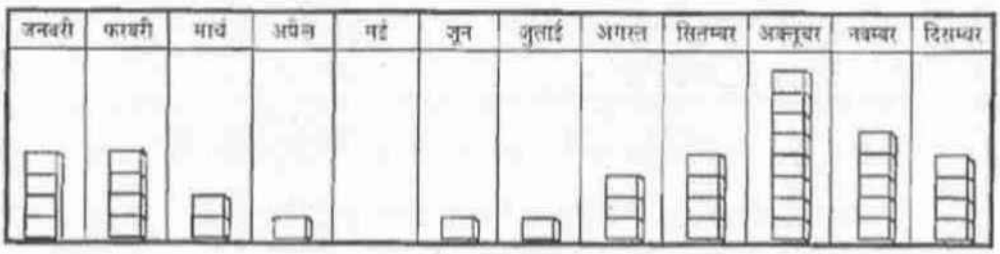
2 x 16è100 + $\frac{1}{2}$ = ______

क्या उत्तर एक ही है? या अलग–अलग हैं? क्यों ?

घ) सालगिरह चार्ट

मोटे कागज़ के एक बड़े टुकड़े पर शिक्षक 12 स्तम्भ (हर महीने के लिए) बना दे। प्रत्येक बच्ची घर से एक खाली माचिस लाकर और उस पर किसी प्रकार से निशान लगा दे। (शिक्षक अपने पास कुछ खाली माचिस डिब्बियां रखे ताकि उन बच्चों को मिल सकें जो लाना भूल गए हों।) अब प्रत्येक बच्ची अपनी माचिस को चार्ट के अपने जन्मदिन के महीने वाले स्तम्भ में चिपका दे।

चार्ट शायद नीचे दर्शाए जैसा दिखे :



चित्र 8

अब शिक्षक प्रश्न पूछे

- किस महीने में सबसे अधिक जन्मदिन हैं?
- किस महीने में सबसे कम जन्मदिन हैं?
- वर्ष के पहले तीन महीनों में कितने जन्मदिन पड़ते हैं?

हमने कुछ गतिविधियां देखी जिनमें कुछ गतिविधियां खेल के रूप में हैं तो कुछ पहेलियों के रूप में। इनमें बच्चे रुचि रखते हैं इस तरह की किसी गतिविधि का सबसे अहम् पहलू होता है बच्चों द्वारा अपनी बुद्धि का इस्तेमाल करना। वे इसे चुनौती के रूप में लेते हैं, यह चुनौती चाहे खुद के प्रति हो या दूसरों के साथ। प्रत्येक खिलाड़ी सोचने में व्यस्त है कि सबसे बढ़िया रणनीति क्या होगी? जब तक उसे लगेगा कि इस खेल में उसकी बुद्धि के लिए कुछ चुनौती है, वह इसमें व्यस्त रहेगी। हां, यह ज़रूर है कि, अन्य कार्यों की तरह खेल में भी चुनौती बच्चे की पहुंच के स्तर पर होनी चाहिए। इनमें, बच्चे गणितीय ज्ञान व अवधारणाओं के साथ जूझ ज़रूर

रहे हैं, उसका उपयोग कर रहे हैं, किन्तु ज़ोर सीखने/सिखाने पर नहीं है और यह विधि शिक्षक–केंद्रित तो कदापि नहीं है। इनमें ऐसा कोई स्पष्ट सबक नहीं दिखता जिसे सीखा ही जाना है। दरअसल इनमें तो गणितीय ज्ञान गतिविधि का केन्द्र न रहकर बच्चों के लिए खेल का साधन बन जाता है। गलत–सही संबंधी फीडबैक की व्यवस्था भी आम तौर पर गतिविधि में ही समाहित होती है– या तो साथी एक–दूसरे की जांच करते हैं या उत्तर ग़लत होने पर खेल ही आगे नहीं बढ़ पाता।

इन खेलों में पूरा ध्यान सही उत्तर पाने पर नहीं बल्कि खेलने व जीतने की कोशिश करने पर है। बच्चे स्वयं के जीतने की सम्भावना का आकलन करने के लिए कई मर्त्तबा अपने गणितीय ज्ञान का उपयोग करते हैं। जब खिलाड़ी कुछ ऐसे गणितीय विचारों अथवा रणनीतियों की खोज करते हैं जिनकी मदद से वे अधिक प्रभावी ढंग से खेल सकते हैं, तो वे इनका उपयोग अपनी जीत की सम्भावना बढ़ाने के लिए करते हैं। सीखने से बेहतर खिलाड़ी बनने में मदद मिलती है मगर सीखना इस खेल का मकसद नहीं है।

यदि किसी गतिविधि को सीखने के लिए प्रभावी साधन बनाए रखना है, तो यह आवश्यक है कि उसमें एक खेल की वे खूबियां बनी रहें जो उसे मज़ेदार बनाती हैं। हमें कोशिश करनी चाहिए कि वे 'पाठ' न बन जाएं। आगे ऐसे दो उदाहरण दिए गए है।

गतिविधि 5 (बोलो भई कितने) : इस खेल में पूरी कक्षा भाग लेती है। शिक्षक बीच में खड़ी हो जाती है और बच्चे उसके आसपास गोल चक्कर में घूमते हैं।

शिक्षिका कहती है, "बोलो भई कितने?"

बच्चे जवाब देते हैं, "आप बोलो जितने।"

तब शिक्षिका 1 से 15 (या अधिक) के बीच की कोई संख्या बोलती है। बच्चों को झटपट उतने–उतने बच्चों के समूह बनाना होता हैं। जो बच्चे बच जाते हैं, वे खेल से बाहर हो जाते हैं। यदि कोई समूह शिक्षक द्वारा बोली गई संख्या से छोटा या बड़ा है, तो उसके सारे बच्चे खेल से बाहर हो जाएंगे। इसके बाद जो बच्चे खेल में बचते हैं वे फिर चक्कर लगाते हैं, और खेल आगे बढ़ता है। एक निर्धारित समय के बाद जो बच्चे खेल में बने रहते हैं उन्हें विजेता घोषित कर दिए जाते हैं।

इसका उपयोग संख्याओं से जुड़ी अन्य अवधारणाओं, जैसे 'से कम', 'भाग' आदि के अभ्यास के लिए भी किया जा सकता है।

गतिविधि 6 (जोड़ना–घटाना) : यह खेल कक्षा 3 के बच्चों के लिए बनाया गया था। इसके लिए एक खेल पट की ज़रूरत होती है जिस पर यहां बगल में दिया गया चार्ट चिपकाया जाता है और दो पांसों की ज़रूरत होती है जिनके 6 सतहों पर 0 से 5 तक के अंक लिखे होते हैं। इसके लिए 2 से 4 अलग–अलग प्रकार के 30–30 गोटियों की भी ज़रूरत पड़ती है। यदि गोटी न हों, तो कंकड़ से काम चलाया जा सकता है। एक बार में 2 से 4 तक बच्चे खेल सकते हैं।

0	7	14	8	4	15	1
3	5	10	1	6	8	0
12	2	9	11	4	1	15
8	12	1	2	10	3	12
2	14	4	11	9	5	6
15	10	3	12	5	7	11
7	14	9	6	13	10	4

चित्र 9

एक बच्ची पांसे फेकती है। दो पांसों पर जो संख्याएं आएं, उनका जोड़, घटा, गुणा या भाग कर सकते हैं (खिलाड़ी ही संक्रिया का चुनाव करती है)। यदि इस तरह प्राप्त संख्या बोर्ड पर है, तो उस पर खिलाड़ी की गोटी रख दी जाती है। गोटी रखकर खिलाड़ी फिर से पांसा फेंकती है और बोर्ड पर संख्या खोजने की कोशिश करती है। एक खिलाड़ी की बारी तब ही समाप्त होगी जब या तो परिणामी संख्या बोर्ड पर न दिखे या वह कोई ग़लती कर दे। तथा

अगला खिलाड़ी उन्हीं संख्याओं पर अपनी गोटी रख सकेगी जिन पर पहले से गोटी न रखी हो। सारी संख्याओं पर गोटी रखे जाने तक खेल चलता है। बोर्ड पर जिसकी सबसे ज्यादा गोटी होंगी, वही जीतेगी।

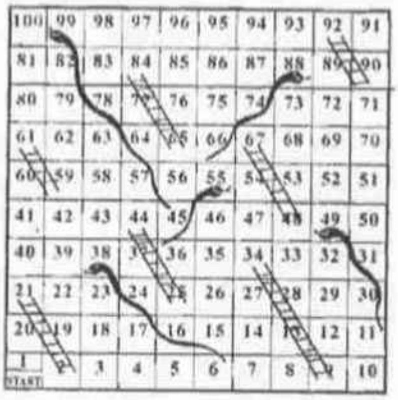
गतिविधि 5 और 6 का एक महत्त्वपूर्ण लक्षण यह है कि इनमें सबकी भागीदारी सम्भव है। इसके अलावा ध्यान खेलने पर है, न कि यह फ्रिक करने पर कि "मैं समझी या नहीं?" या "क्या मैं कुछ गलती कर रही हूँ?"

E8) इस खेल की अन्य क्या खासियत है? कोई पांच बताइए।

E9) यदि गतिविधि 6 आप कक्षा 5 के बच्चों के साथ कराना चाहते हैं तो इस गतिविधि में क्या परिवर्तन करेंगे?

सांप–सीढ़ी

यह एक पारम्परिक खेल है जिसे एक बोर्ड (चित्र 10) पांसों व गोटियों की मदद से खेला जाता है।



चित्र 10 : सांप–सीढ़ी का बोर्ड

E10) (क) सांप–सीढ़ी खेल के लक्षणों का विश्लेषण कीजिए।

(ख) यहां सांप–सीढ़ी खेलते कुछ बच्चों की टिप्पणियां प्रस्तुत हैं, जो हमने सुनी :

"मुझे तीन चाहिए। काश मुझे तीन आ जाएं, तीन आ जाए, तीन आ जाए .....

"तेरे दो आंएगे, दो आएंगे।"

'मुझे आठ चाहिए। काश, मुझे छः और दो आ जाएं। वाह! छः तो आ गया। भगवान, मुझे दो दे दे।"

इन टिप्पणियों के आधार पर बताइए कि बच्चे खेल में किस प्रकार के गणितीय ज्ञान का उपयोग कर रहे हैं?

इस प्रकार सीखने के इन कार्यों को हम गतिविधि कह सकते हैं। अब देखें कि किस तरह की गतिविधि 'करना' बच्ची को सीखने में मदद नहीं करेगा।

गतिविधि–आधारित गणित की कक्षा

हम इस बात पर ज़ोर देते रहे हैं कि बच्चों को किसी अवधारणा या प्रक्रिया की खोजबीन करने के पर्याप्त अवसर दिए जाने चाहिए। इसके लिए सावधानीपूर्वक तैयार की गई गतिविधियों का उपयोग करना होगा। दरअसल हमें आसपास आम तौर पर जैसी कक्षाएं नज़र आती है, उससे बहुत अलग तरह से हमें अपनी कक्षा के बारे में सोचना होगा। जैसे– हमें अपनी कक्षा में अन्तःक्रिया की योजना बनाने में उद्देश्य स्पष्ट होने चाहिए।

जैसे– आप बच्चों को किसी अवधारणा से परिचित या अवधारणा के बारे में बच्चों की समझ को बेहतर बनाना या किसी अमूर्त बात को ठोस रूप देना, चित्रित करना चाहते हैं या आगे बढ़ चुके बच्चों को ज़्यादा चुनौतीपूर्ण कार्य देना चाहते हैं।

एक बार उद्देश्य साफ हो जाए तो आप उपयुक्त गतिविधियां ढूंढ सकते हैं। कुछ गतिविधियां तो आपके द्वारा पहले की गई गतिविधियों का विस्तार हो सकती हैं। कुछ गतिविधियां नई भी हो सकती हैं, कुछ गतिविधियां आपके उद्देश्य से सीधी तरह जुड़ी हो सकती हैं जबकि कुछ अन्य ऐसी हो सकती हैं जो शायद उद्देश्य से सीधी सम्बन्धित न हों मगर जिनमें रोचक खोजबीन के खूब अवसर हों। या कोई गतिविधि ऐसी हो सकती है कि बच्ची को तुरन्त सोचने की ज़रूरत पड़े।

E11) दो गतिविधियों के उदाहरण दीजिए जिनमें एक भाग के परिचय से सीधे सम्बन्धित हो तथा दूसरी इसी उद्देश्य से लेकिन सीधे रूप से सम्बन्धित नहीं हो।

किसी भी गतिविधि को सीखने के कार्य के रूप में सफलतापूर्वक उपयोग करने के लिए कई बातें जरूरी हैं। ऐसी कुछ बातों की सूची–

- **सामग्रियों व आयोजन** की अच्छी तैयारी होनी चाहिए। आपको गतिविधि के बारे में पहले से ही ध्यान से सोचना होगा ताकि कोई सामग्री छूट ना जाए। (आप बच्चों को वर्तमान गतिविधि बताने से पहले उनसे किसी और गतिविधि के माध्यम से सामग्री इकट्ठा करने या लाने को कह सकते हैं।) सामग्री की तैयारी मे पर्याप्त कार्ड बनाना, गोटियां, पांसे, वर्कशीट आदि तैयार रखना और शामिल है। क्योंकि यदि सिर्फ वस्तुें बटोरने में समय बर्बाद होता है, तो बच्चों की रूचि ख़त्म हो जाती है।
- यह बेहतर होता है कि कक्षा के कमरे में ही **बुनियादी सामग्री का भण्डार** हो ताकि अचानक अवसर मिलने पर आप उपयुक्त गतिविधियां तत्काल शुरू कर सकें। सरल खेल भी कमरे में ही किसी सुविधाजनक जगह पर रखे जा सकते हैं ताकि उन बच्चों को दिए जा सके जो काम जल्दी खत्म कर लें और बोर हो रहे हों।
- **गतिविधि अकेले करने की है या समूह में?** यदि टोलियां बननी हों, तो यह शुरू में ही बना लेना बेहतर होता है।
- गतिविधि में क्या करना होगा ? इसके लिए शुरू में ही **स्पष्ट निर्देश** दे देना चाहिए। अक्सर लम्बे व्याख्यान की बजाय एक सरल चित्र या उदाहरण से बात को ज़्यादा आसानी से समझाया जा सकता है। जब गतिविधि चल निकले तब आपके द्वारा या बच्चों के द्वारा नए नियम भी जोड़े जा सकते हैं। (याद कीजिए हम नए खेल कैसे सीखते हैं– सिर्फ नियम पुस्तिकाएं पढ़–पढ़कर नहीं बल्कि उन्हें वास्तव में खेलकर या दूसरों को खेलते देखकर) 'बूझो तो जाने' नामक गतिविधि में यही रणनीति अपनाई गई है।
- कम से कम शुरूआती दौर में तो स्पष्टीकरण वगैरह देने के लिए **आपको वहीं बच्चों के साथ रहना** होगा।
- यदि गतिविधि छोटी–छोटी टोलियों में होना है, तो आपको समय निकालकर टोलियों में घूमने व प्रत्येक टोली के साथ बैठकर बात करना चाहिए। आपको प्रत्येक टोली के साथ निष्कर्षों पर चर्चा करनी होगी जिससे आप सुनिश्चित कर सकें कि सारे बच्चे गतिविधि में व्यस्त हैं। इस बातचीत के दौरान आपको मौका मिलेगा कि उनका ध्यान मुख्य बातों पर ला सकें, उन्हें सोचने के लिए कुछ दे सकें, उनके सोच का पुष्टिकरण कर सकें, सुराग दे सकें, यह देख सकें कि गतिविधि अपेक्षित ढंग से आगे बढ़ रही है और अन्य सारे काम (जैसे रिकॉर्डिंग) किए जा रहे हैं। टोलियों में घूमकर आप बच्चों को साथ–साथ

काम करने को बढ़ावा दे सकेंगे और वे जो कुछ कर रहे हैं, उस पर उन्हें फीडबैक भी दे सकेंगे। बच्चे उस गतिविधि से क्या वे बातें सीख रहे हैं जो हम चाहते थे और इन बातों को किस हद तक सीख रहे हैं, उसको भी आप जांच कर सकेंगे।

चित्र 11 : एक 'सक्रिय' कक्षा

- कई गतिविधियों के अन्त में कक्षा के सभी बच्चों के बीच चर्चा की ज़रूरत होती है। इसमें भी ज़रूरी होगा कि आप चर्चा का नेतृत्व इस तरह करें कि जो कुछ किया गया, बच्चों को उसके बारे में सोचने व निष्कर्षों का सारांश निकलाने में मदद मिले। ऐसा न हो तो, हो सकता है कि गतिविधि में भागीदारी तो बहुत हो किन्तु जो आप चाहते थे कि बच्चे सीखें, उस पहलू पर ध्यान केन्द्रित न हो पाए।

E12) ऊपर दी गई सूची में आप कौनसी बातें जोड़ना चाहेंगे? क्या आप कक्षा 5 के बच्चों को गतिविधि देते समय कुछ ऐसी सामान्य बातें ध्यान रखेंगे, जो कक्षा 1 के बच्चों के साथ शायद ज़रूरी न हों?

सारांश

इस पाठ में हमने निम्न बिन्दुओं पर चर्चा की।

1. हम 'गतिविधि' शब्द का इस्तेमाल अलग–अलग अर्थों में करते हैं। मोटे तौर पर इसका अर्थ सीखने के ऐसे कार्य से होता है जिसमें सीखने वालों की सक्रिय भूमिका हो, वे सोचें व तर्क करें, पहल कर सकें तथा अवधारणा के साथ जुड़ सकें।
2. किसी गतिविधि के विभिन्न लक्षण।
3. कक्षा की सीखने–सिखाने की क्रिया का विश्लेषण किया कि यह जानने के लिए कि वह गतिविधि है या नहीं?
4. कक्षा में ऐसा माहौल बनाने के तरीके जिसमें बच्चे गतिविधियों के ज़रिए सीख सकें।

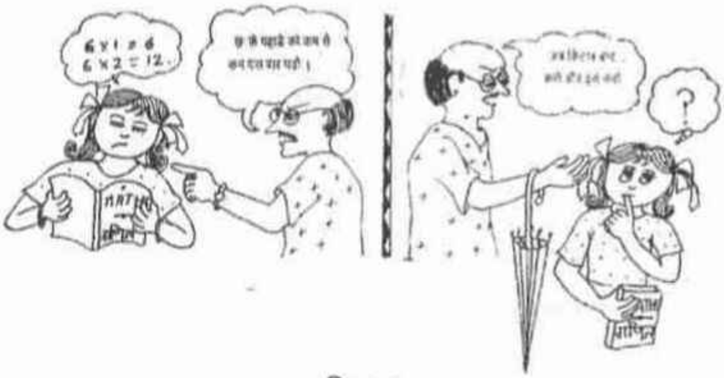
❁❁❁❁❁❁❁

पाठ – 10
सीखने की प्रक्रिया पर विभिन्न विचार

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- सीखने का मॉडल बनाना
- बैंकिंग मॉडल
- सीखना यानी प्रोग्रामिंग
- सीखना यानी समझ का निर्माण
- सारांश

मास्टरजी सचमुच 7 वर्षीय सीता से नाराज थे। उन्होंने उसे छः का पहाडा याद करने को दिया था और हालत यह थी कि वह छः तिया' से आगे नहीं बता पा रहीं थी। तो उन्होंने उससे कहा कि वह पूरे पहाड़े को दस बार पढ़े। जब वह दस बार पढ़ चुकी तो उन्होंने उससे किताब बंद करके पहाडा बोलने को कहा। लेकिन वह बेचारी पहली बार जितना बोली थी उससे आगे न बढ़ सकी।



चित्र 1

मास्टरजी को यह यकीन था कि बार –बार दोहराने से वह जरूर सीख जाएगी।

सीखने के बारे में मास्टरजी के नजरिए से कई लोग सहमत हैं और मानते हैं कि बच्चे गणित ऐसे ही सीखते हैं। सीखने के बारे में कई शिक्षकों के कई और सिद्धान्त भी हैं। इस इकाई के शुरू में हम 'सीखना क्या है' को लेकर विभिन्न नजरियों की चर्चा करेंगे। जैसे– अगर मैं कहूं कि मैने हासिल वाले जोड़ के सवालों को हल करना सीख लिया है तो इसका मतलब क्या है ? क्या यह होगा कि मैने संख्याओं का जोड करने के ऐल्गोरिद्म को सीख लिया है और मैं हासिल का ठीक–ठीक हिसाब रखना जानती हूं? या 'क्या इसका मतलब यह भी है कि मैं समझ चुकी हूं कि कक्षा या घर की आम परिस्थितियों में संख्याओं का जोड़ कब किया जाता है?

हमें सीखने के बारे में सोचने की जरूरत हैं बतौर शिक्षक हम अपनी शिक्षण गतिविधियों की योजना इस आधार पर बनाते हैं कि हम क्या सोचते हैं कि बच्चे कैसे सीखते हैं और हम उन्हें क्या सिखाना चाहते हैं। अर्थात हममें से प्रत्येक के दिमाग में सीखने की प्रक्रिया का एक मॉडल है। सीखने की प्रक्रिया को यह मॉडल इस बात को समझाने की कोशिश करता है कि दिमाग में ज्ञान कैसे विकसित होता है। इस पाठ में हम सीखने के तीन मॉडलों को देखेंगे। इनका मकसद यह है कि आप जिस मॉडल के आधार पर कोई भी विषय, खासकर गणित, पढ़ाते हैं तो उसकी जांच करने में ये आपकी मदद करें। इस दौरान हम कई सवाल उठायेंगे जो यह सोचने में आपकी मदद करेंगे कि सीखने में याद्दाश्त का क्या स्थान है; क्या एक ही तरह के सवाल बारम्बार हल करके सूत्र सीखे जाते हैं; बच्ची को अपनी समझ निर्मित करने देने का कितना महत्व है; तथा इसी तरह के अन्य बुनियादी मुद्दे।

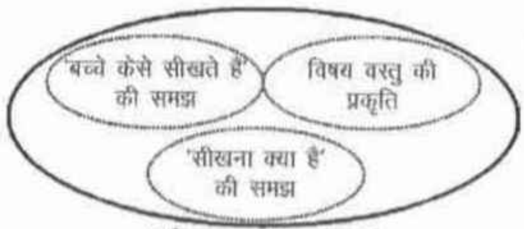
उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- सीखने के बारे में अपनी समझ बता पाएंगे।
- सीखने के बैंकिंग प्रोग्रामिंग व रचनावाद मॉडलों के प्रमुख लक्षण बता पाएंगे।
- यह समझा पाएंगे कि इनमें से प्रत्येक मॉडल में सीखने की प्रक्रिया की क्या समझ झलकती है।

सीखने का मॉडल बनाना

सीमा एक पब्लिक स्कूल में प्राथमिक शिक्षक है। वह पूरी कक्षा से एक सुर में जोड के कथनों को बार–बार दोहराने को कहती है। जब पूछा गया कि वह ऐसा क्यों करती है, तो उसने बताया कि इससे बच्चे जोड जरूर सीख जाएंगे।

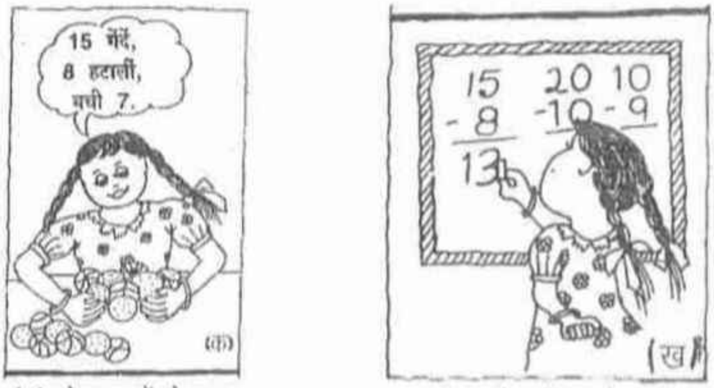


सीखने का मॉडल
चित्र 2

आयशा मध्यप्रदेश के एक गांव में कक्षा 3 के बच्चों को स्थानीय मान की अवधारणा पढा रही है। इसके लिए उन्हें मोतियों से खेलने का वक्त देती है वे इन मोतियों से माला बनाते हैं, बचे हुए मोतियों को गिनते है, आदि। आयशा उनसे अन्य गतिविधिया भी कराती है,जैसे छोटी–छोटी तीलियों को गिनना,उनके समुह बनाना, आदि। हर चरण पर वह उनसे बात करती हैं, उनसे समझना चाहती है वे क्या कर रहे हैं और वे जो बताते हैं उस पर वह अपनी टिप्पणी भी देती है। आयशा को यकीन है कि यही सबसे बढ़िया तरीका है जिससे बच्चे स्थानीय मान सीख सकते हैं।

सीमा, आयशा और आपके समेत हजारों लोग हैं जो छोटे बच्चों को गणित सिखाने के काम में लगे हैं। आप यह काम कैसे करते हैं, यह कई बातो पर निर्भर करता है। इनमें से एक बात है सीखने की प्रक्रिया के बारे में आपकी समझ है। जाहिर है कि इसमें सारी बातें शामिल होंगी, जैसे– बच्चे कैसे सीखते हैं? पर आपकी सोच; आप जो विषयवस्तु पढ़ाना चाहते हैं (या चाहते हैं कि बच्चे सीखें) उसकी प्रकृति; तथा इस बारे में आपकी समझ कि सीखने का मतलब क्या है। इन तीन बातों को जोड़कर बनता है सीखने का मॉडल (चित्र 2)।

हममें से कोई भी सीखने के किस मॉडल को अपनाता है,यह काफी हद तक इस बात से तय होता है कि 'सीखना' शब्द से हम क्या समझते हैं।



(क) ठोस वस्तुों के साथ (ख) औपचारिक तौर पर

चित्र 3 : क्या अनिशा को कुछ भी समझ नहीं है घटाने की?

उदाहरण 1 : नायर अपनी कक्षा 4 के छात्रों को भिन्नों का जोड़ सिखाने में दो सप्ताह लगा चुके थे उसने पाठ्यपुस्तक तथा अन्य पुस्तकों में से कई सवाल बोर्ड पर उनके लिए हल किए थे। उन्होंने बच्चों को गृहकार्य के तौर पर पाठ्यपुस्तक के सवाल भी दिए थे। गृहकार्य जांचने पर उन्होंने पाया कि ज्यादातर बच्चे सारे सवाल सही कर लेते हैं। इसके आधार पर और कक्षा में प्रदर्शन के आधार पर उसे यकीन था कि बच्चे भिन्नों का जोड़ सीख गए हैं। एक हफ्ते बाद जब उन्होंने भिन्नों की संक्रियाओं से सम्बंधित वैसे ही कुछ नए सवाल दिए तो अधिकांश छात्र इन्हें नहीं कर पाए। वे अत्यंत निराश हो गए।

क्या आपको लगता है कि नायर की कक्षा भिन्नों को जोडना सीख गयी थी? आप इसका फैसला कैसे करेंगे? क्या आप इसे सीखने की अपनी परिभाषा के अनुसार नही करेंगे? चंद शिक्षकों से हमने बातचीत की, वे सीखने को किस रूप में समझते हैं–

- एक दिए गए उत्प्रेरक का अपेक्षित जवाब देना ही सीखना है।
- अभ्यास के कारण व्यवहार में बदलाव ही सीखना है।
- अभ्यास और अनुभव के कारण व्यवहार में बदलाव ही सीखना है।
- बारम्बार अभ्यास के जरिए व्यवहार में स्थायी बदलाव ही सीखना है।

E1) ऊपर दी गई परिभाषाओं में से आप किनसे सहमत हैं, और क्यों? यदि आपकी परिभाषा कोई और है, तो उसे लिख दीजिए। समझाइए कि आप इसे क्यो मानते हैं कि यह ऊपर दी गई परिभाषाओं से अलग है?

ऊपर दी गई सभी परिभाषाओं में यह कहा गया है कि सीखना तभी होता है जब वह दूसरे लोगों को नजर आए, अर्थात दूसरे लोग सीखने वाले के व्यवहार में बदलाव देख सकें। जैसे– इन परिभाषाओं के मुताबिक यदि कोई बच्ची आपको घटाने के किसी सवाल का सही जवाब दे दे, तो वह घटाना सीख गई है, लेकिन वह सही जवाब नही देती है, तो वह नहीं सीखी है। शिक्षक की इस बात में कोई दिलचस्पी नहीं होती कि गलत जवाब किस समझ की वजह से है या किस हद तक बच्ची अवधारणा को समझ गई है। पर हो सकता है कि इस बच्ची ने घटाने की कुछ समझ बना ली हो, और शायद यह समझ लिया हो कि घटाने पर आपको पहले से छोटी संख्या मिलती है। यानी,जब वह आपको अपेक्षित उत्तर नहीं देती है, तब भी हो सकता है कि घटाने के बारे में उसका कुछ अहसास बन गया हो। यह समझ शायद घटाने के सवाल हल करने के क्षमता के रूप में तुरंत नजर न आए। लेकिन, जब वह अधिक से अधिक स्थितियों में इस समझ को लागू करती जाएगी तो उसकी समझ आगे विकसित होगी।

कुछ मनोवैज्ञानिकों का मानना है कि सीखने की प्रकिया को समझने के अन्य तरीके भी है। वे यह अपेक्षा नहीं करते कि सवाल हल करने में 'पढ़ाया गया' तरीका बच्चे तुरंत प्रदर्शित कर देंगे। वे इस बात का सम्मान

करते हैं कि बच्ची को अपने ढंग से सोचने और विश्लेषण करने की जरूरत होती है तथा सवाल हल करने के अपने तरीके को खोजते हुए उसे विकसित करने की जरूरत होती है। इसके लिए वे सुझाव देते है कि बच्चों को ऐसे अलग–अलग तरह के कार्य दिए जाएं जिनसे उन्हें सीखने का मौका मिले।

मान लीजिए कि एक बच्ची के सामने वास्तविक जीवन व कक्षा की ऐसी कई स्थितियां प्रस्तुत की जाती हैं जिनमें उसे वस्तुओं को जोडना और घटाना होता है। इनमें बाजार से सामान खरीदना और बेचना भी शामिल हो सकता है। काफी सम्भावना है कि ये अनुभव उसे संख्याओं की एक समझ बनाने में तथा जोड़ने व घटाने का अर्थ समझने में मदद करेंगे। यह हो सकता है कि ऐसी समझ तुरंत अलग–अलग सवालों को हल करने की क्षमता के रूप में न दिखाई दे। लेकिन यह उन स्थितियों में एक विकसित क्षमता के रूप में नजर आए, जहाँ बच्ची को इसकी जरूरत हो।

बच्चों को सीखने में मदद के लिए दिए जाने वाले काम कई तरह के हो सकते है। कुछ शिक्षक मानते है कि सीखना बारम्बार अभ्यास का परिणाम है। उनके लिए इसका अर्थ होता है कि एक ही काम को बार–बार दोहराना। वे उन बच्चों को शाबाशी देते हैं जो उस काम को सही कर लें और गलती करने वाले को दण्ड मिलता है। मसलन, वे बच्चों को एक विधि बताएंगे और उस विधि का इस्तेमाल करके हल करने को कई सवाल दे देंगे। इसके बाद वे बच्चों के काम को जांचेंगे और सिर्फ गलत या सही का निशान लगाएंगे। इस तरह के 'बारम्बार अभ्यास' और आकलन से कितना सीखना होता होगा? क्या बच्चों को किसी अवधारणा से बार–बार संपर्क करवाने के कोई और तरीके हो सकते हैं?

आपने बच्चों को किसी एक गणितिय अवधारणा से जूझने के कई मौके देने से संबंधित उदाहरण देखे। अवधारणाओं और प्रक्रियाओं के साथ ऐसे अधिकांश अभ्यास ठोस वस्तुओं तथा कार्यों के इस्तेमाल के जरिये होने चाहिए जिनमे बच्चे खुद शामिल हो। अभ्यास में यह भी शामिल होगा कि सीखने वाले खुद अपने लिए और अपने सहपाठियों के लिए सवाल व कार्य तैयार करे। सीखने के ये कार्य दोहराव या एक ही किस्म के कई सवाल हल करने से बहुत अलग है। दरअसल हर कार्य की रचना इस तरह से की जानी चाहिए कि बच्ची के सामने चुनौती पेश हो।

E2) अपने विचार से ऐसे अनुभवों की एक सूची बनाइए जिनसे सीखना विकसित होता है। (अवलोकन, प्रयोग करना, नकल करना जैसी गतिविधियों का उपयोग करते हुए)

अब हम तीन मॉडलों की चर्चा करेंगे और देखेंगे कि शिक्षण पर उनका क्या असर है?

सीखना यानी रटना : बैंकिंग मॉडल

एक दिन मेरी मुलाकात एक पब्लिक प्राथमिक शाला के हैडमास्टर से हुई। उनके मुताबिक गुणा सिखाने का सबसे अच्छा तरीका यह है कि बच्चों को एक पेड़ के नीचे गोले में बैठने को कहा जाए। अब एक बच्ची बीच में आकर खड़ी हो जाए और जोर से बोले '2 एकम 2'। बाकी सारे बच्चे इसे जोर से दोहराएं। इस तरह से बच्ची पूरा पहाड़ा बोले और बाकी बच्चे गुणा के ये तथ्य बार–बार दोहराएँ। जब पूछा गया कि यह विधि सबसे अच्छी क्यों है? तो उनका जवाब था, मैंने गुणा इसी तरह सीखा था और मैं पहाडे नहीं भूला।

हैडमास्टर के सीखने के मॉडल के मुताबिक सीखने का मतलब मूलतः तथ्यों को याद करना और पूछे जाने पर फौरन बोल देना है। अर्थात इस मॉडल में सीखने व रटने को एक ही बात माना जाता है।

उदाहरण 2 : मैं और विक्की जो कक्षा 5 में पढ़ते हैं। एक दिन हम बातचीत कर रहे थे कि वह गणित के सवाल कैसे करता है:

विक्की : मैं किताबों में से सवाल करता हूं। उनके जवाब कुंजी में नहीं देखता।

मै : तो फिर तुम सवाल कैसे करते हो?

विक्की : दिमाग से।

मैं : दिमाग से कैसे करते हो?

विक्की : सोचकर।

मैं : सोचना क्या होता है?

विक्की : याद करना।

आप देख सकते है कि विक्की के मन में सोचने और याद करने के बीच, सीखने और रटने के बीच कोई फर्क नहीं है।

इस मॉडल में सीखने वालों से उम्मीद यह की जाती है कि वह पढाए गये प्रश्नों का उत्तर बोलो की अपनी क्षमता का उपयोग करे। इस मॉडल के तहत् न सिर्फ पहाड़े बल्कि यूक्लिडीय ज्यामिति की प्रमेयों के प्रूफ भी रटे होते हैं। सीखने वालो को प्रमेय और प्रूफ, चरण दर चरण दे दिए जाएंगे। उनसे कहा जाएगा कि वह वही प्रूफ (उन्हीं शब्दो में) बार–बार दोहराए। यानी, यहां जिस बदलाव की उम्मीद की जाती है कि सीखने वालो को जिस ढंग से प्रमेय के प्रूफ पढ़ाए गये थे, उन्हें उसी रूप में दोहरा देने की क्षमता उसमें आ जाएगी।

याद करने को सीखने के बराबर मानना ऐसा है मानो जानकारी के ढेर को किताब में से निकालकर दिमाग में रखना और उसके बाद में परीक्षा के समय इसे दिमाग से उत्तर पुस्तिका में उतार देना। सीखने के इस नजरिए को बैंकिंग मॉडल कहा जा सकता है क्योंकि इस मॉडल के अनुसार ,किसी बैंक की तरह याददाश्त में तथ्य रखे व निकाले जाते है। शिक्षक छात्रों के दिमागी– बैंक मे ज्ञान जमा कर देते हैं और फिर छात्र जरूरत पडने पर इन्ही तथ्यों को निकाल लेते हैं।

E3) गणित पढ़ाने के संदर्भ में बैंकिंग मॉडल के तहत् सीखने वाले से तीन अपेक्षाएं बताइए।

अब देखते हैं कि यदि शिक्षक के रूप में हम बैंकिंग मॉडल को अपनाएं, तो बच्चों के लिए सीखने के मौके बनाने के लिए हम क्या करेंगे। इस मॉडल में बच्ची से एक काम बार–बार करने को कहा जाएगा। उससे कहा जा सकता है कि वह किसी बात को बोले (जैसे गिनती) या उसे कुछ सवालों के हल देकर कहा जा सकता है कि वह इन्हीं सवालों को या इन जैसे सवालों को बार–बार हल करे। शुरू में उससे यह भी कहा जा सकता है कि वह बोर्ड से या किसी दूसरी कॉपी से इन उत्तरों को कई बार अपनी कॉपी में उतारें। उन्ही सवालों के जवाबों का अभ्यास बार–बार करने से धीरे–धीरे बच्ची याददाश्त से उन सवालों के जवाब लिख सकेगी।

हमारी ज्यादातर कक्षाएं इसी तरह से चलती हैं। जब शिक्षक अपना पाठ समाप्त कर देता है, तो वह बच्चों से इसे याद करने को कह देता है। जब वह कक्षा में सवाल पूछता है तो वह बच्चों से याद करके बताने को कहता है। इस मॉडल का इस्तेमाल करने वाले मानते हैं कि बच्ची ने तभी कुछ सीखा है जब वह शिक्षक द्वारा उस सम्बंध में कही गई बातों को दोहरा सके, वरना नहीं।

लिहाजा बच्चे अपने शिक्षकों या माँ/बाप/दोस्तों से मदद यह मांगते हैं कि वे जांच करके बता दें कि उन्होंने विषयवस्तु को ठीक से याद कर लिया हैं या नहीं। वे बड़ों से चाहते हैं कि वे उन्हें बार–बार दोहराकर याद करने में मदद करें। जब कुछ बच्चों से रटने का कारण पूछा गया, तो उन्होंने बताया "ताकि हम अपने आप कर सकें, हमें किताब न देखनी पड़ें", और "याद करके हम किताब और शिक्षक से स्वतंत्र हो जाएंगे क्योंकि तब ज्ञान दिमाग में होगा" और "ज्ञान बढ़ाने के लिए।"

यह बात प्रसिद्ध है कि इस मॉडल में अच्छे छात्र वे होते हैं जिनकी याददाश्त अच्छी है। ये छात्र वास्तव में कड़ी मेहनत करते हैं क्योंकि याद करना कठिन काम है, आपको एक ही बात को कई बार दोहराना होता है ताकि कहीं भूल न जाएं। इस मॉडल के अनुसार, जो छात्र परीक्षा में अच्छा प्रदर्शन नहीं करते वे मूलतः आलसी होते हैं।

E4) कक्षा 9 व 10 में आपको पढ़ाने वाले कितने शिक्षक शिक्षा के बैंकिंग मॉडल को मानते थे? जिन बातों को याद करना होता था, उन्हें याद करने के लिए आप कौन सी तकनीकें व तरीके अपनाते थे?

बैंकिग मॉडल सीखने की प्रक्रिया को समझने के लिए काफी है ? मेरे कुछ मित्र इस बात से सहमत होंगे कि सीखने व दुनिया में काम चलाने के लिहाज से याददाश्त की एक महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है। लेकिन क्या इन्सानी दिमाग सिर्फ जानकारी और अतीत के अनुभवों का भंडार है जिन पर भविष्य के सारे क्रियाकलाप, विचार और नई बातों का सीखना निर्भर करता है। यदि यह सही है, तो आप इस बात से कैसे समझ पायेगें कि हर बच्ची अपनी मातृभाषा जानती है और अपने आस–पास बोली जाने वाली कोई भी भाषा सहज रूप से इस्तेमाल कर लेती है?

जब कोई बच्ची एक वाक्य सुनती है, तो वह इस्तेमाल होने वाले शब्दों का अर्थ खोजने की कोशिश करती है। जैसे– जब बच्ची सुनती है कि 'वह कुत्ता बड़ा है', तो वह इसे किसी अपेक्षाकृत छोटी वस्तु से तुलना करने के संदर्भ में समझने की कोशिश करती है। जब वह कुत्ते से बड़ा कोई जानवर देखती है, जिसे उसने पहले भी देखा हो, तब वह इस कुत्ते की तुलना इस बड़े जानवर से करके कहती है, 'कुत्ता छोटा है'। इसी प्रकार से अपने रोजमर्रा के क्रियाकलापों में बच्ची कई विचार व भावनाएं व्यक्त करती है। वह अपने ढंग से उन स्थितियों का वर्णन करती है जिनसे वह जूझती है। वह नई स्थितियों में भी अपने आपको व्यक्त कर पाती है। वह ऐसे कई वाक्य बनाकर कह पाती है जो शायद उसने पहले कभी नहीं सुने थे। बच्ची ऐसी किताब भी पढ़ पाती है जो उसने कभी नहीं देखी थी। वह कहानी का कुछ अर्थ बना लेती है और कहानी में आए नए शब्दों के अर्थ सीख लेती है। जैसे– जिराफ के बारे में कहानी पढ़ते हुए कोई बच्ची यह समझ जाएगी कि जिराफ की गर्दन लम्बी होती है और वह पत्तियां खाता है। यह भी सच है कि बच्ची में यह क्षमता होती है कि एक ही शब्द के कई अर्थो को सहेज ले और विशिष्ट संदर्भ में उपयुक्त अर्थ चुन लें।

E5) क्या बैंकिंग मॉडल इस बात की पूरी व्याख्या करता है कि बच्चे गणित कैसे सीखतें हैं? क्या यह मॉडल दिमाग में जानकारी को व्यवस्थित व पुनर्व्यवस्थित करने की क्षमता की व्याख्या करता है? अपने उत्तर के कारण दीजिए।

E6) ऐसी दो कक्षाओं के उदाहरण दीजिए जिनसे पता चले कि शिक्षा बैंकिंग मॉडल पर आधारित है। आप इनमें शिक्षण प्रक्रिया को किस तरह बदलेंगे कि वह सार्थक बन जाए?

E7) अपनी कक्षा में बच्चों के लिए एक गतिविधि सोचिए। यह याददाश्त पर कितनी निर्भर है? अपने किसी मित्र से यही अभ्यास करने को कहिए। क्या उसकी गतिविधि का उद्देश्य भी तथ्यों को याद करना है ?

अब शिक्षण के एक और प्रचलित मॉडल को देखें–

सीखना यानी प्रोग्रामिंग

रजनी कक्षा 2 के बच्चो को हासिल वाले जोड़ की विधि समझा रही थी। वह कह रही थी, "जब भी तुम्हें दो या दो से ज्यादा संख्याएं जोड़ने को मिले तो तीन कॉलम बना लो। इनमें से एक पर सैकड़ा', एक पर 'दहाई' और एक पर 'इकाई' लिख दो। 'सैकड़ा' सबसे बाईं ओर के कॉलम पर लिखो और 'इकाई' सबसे दाईं ओर के कॉलम पर। संख्याओं को एक के नीचे एक लिख लो। यह ध्यान रखना कि दहाई 'दहाई' के और

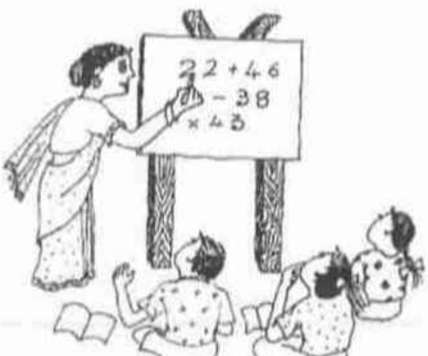
इकाईयाँ 'इकाई' के कॉलम में लिखो। सबसे पहले 'इकाई' वाले अंकों को जोड़ों और ज़रूरी हो तो हांसिल आगे ले जाओ। इसके बाद दूसरे कॉलम का जोड़ करो। इस तरह से प्रत्येक कॉलम को जोड़ों और हर बार हांसिल पता करो।"

रजनी की कक्षा में क्या चल रहा है? क्या यह रटना है? या क्या सीखने का कोई दूसरा मॉडल इस्तेमाल हो रहा है? रजनी की कोशिश है कि बच्चों को एक ऐसा तरीका बता दे, जिसका उपयोग वे आसानी से कर सकें और जिसमें चूक होने की उन्हें कोई फ़िक्र न हो। मुख्य बात यह है कि बच्चों को इस विशेष तरीके को याद रखना होगा और इसका पालन करना होगा। यदि बच्चों को इन चरणों का पालन करने का भरपूर अभ्यास करवा दिया जाए तो फिर वे इस तरह का कोई सवाल पहचानते ही, बगैर सोचे यह तरीका लागू कर सकेंगे।

यदि आप सीखने के इस नज़रिए को मानते हैं तो आप निम्नलिखित मान्यताओं के आधार पर बच्चों को ज्ञात से अज्ञात की ओर ले जाएंगे :

- मुझे इस तरह के सवाल हल करने का सबसे अच्छा तरीका मालूम है और मुझे यह बच्चों को बताना चाहिए।
- बच्चों पर बहुत बोझ न डालकर, उन्हें एक–एक करके सिखाना चाहिए।
- यदि मैं उन्हें यह तरीका सिलसिलेवार पढ़ाऊं और यह सुनिश्चित कर दूं कि वे इन चरणों के अनुसार सवाल कर पाएं, तो उन्हें कोई भी सवाल हल करने में दिक्कत नहीं होगी,
- बच्चों को पहले आसान सवाल करने आ जाएं, तब मैं उन्हें कम आसान सवाल करना सिखा सकती हूं;
- यदि कोई बच्ची एक ही तरह के कई सवाल सुलझा ले तो वह संबंधित विधि सीख जाएगी।

इस मॉडल के मुताबिक, सीखने का मतलब है निर्देशों की एक श्रृंखला जिसे याद करके पालन करना होता है। इसमें माना जाता है कि सीखना टुकड़ों में होता है, थोड़ा–थोड़ा करके। इसमें यह भी माना जाता है कि सभी बच्चे एक ही ढंग से सीखते हैं, हो सकता है कि रफ़्तार अलग–अलग रहे। लिहाज़ा जो बच्चे नहीं सीख पाए है, उनके लिए इतना ही करना है कि उसी प्रोग्राम (निर्देश–श्रृंखला) पर कुछ और उदाहरण लेकर कुछ और समय लगाया जाए। आप शायद सहमत होंगे कि सीखने के इस नज़रिए को 'प्रोग्रामिंग मॉडल' कहना ठीक है। आप देख सकते हैं कि प्रोग्रामिंग मॉडल और बैंकिंग मॉडल के बीच कई समानताएं हैं।



चित्र 4 : बैठकर सुनने के लगातार अभ्यास से बच्चे अच्छे श्रोता ज़रूर बन जाते हैं।

यदि आप प्रोग्रामिंग मॉडल पर चलते हैं तो आप बच्चों को एक रैखिक ढंग से पढ़ाएंगे और ध्यान से उठाए गए छोटे–छोटे चरणों के ज़रिए उन्हें सरल से कठिन धारणाओं की ओर ले जाएंगे। इसी बात को रजनी इस तरह बताती है,

"जब कक्षा के सारे बच्चे बग़ैर हासिल वाले दो अंकों का जोड़ सीख जाते हैं, तब मैं उन्हें दो अंकों के हासिल वाले जोड़ से परिचित कराती हूं और इसके चरण समझा देती हूं। बच्चों को हासिल वाले जोड़ का काफ़ी अभ्यास करवाने के बाद मैं घटाना सिखाना शुरू करती हूं।"

अगर आप मानते हैं कि बच्ची प्रोग्रामिंग से सीख सकती है, तो रैखिक तरह से सिखाने के अलावा, आप बच्ची को एक वक्त पर एक ही किस्म के सवाल देंगे। आप जो सवाल देंगे वे ऐसे होंगे जिनमें एक विधि को इस्तेमाल करने की ज़रूरत होगी। बच्चे उलझन में न पड़ें, इसके लिए आप उसे मिले–जुले सवाल नहीं देंगे। सिर्फ़ वही सवाल चुने जाएंगे जिनमें दी गई विधि का इस्तेमाल होता है। आप ऐसे सवाल नहीं देंगे जिनमें विधि का इस्तेमाल न होता हो या विधि का इस्तेमाल थोड़े फ़ेरबदल के साथ होता हो।

रजनी संख्याओं के हासिल वाले जोड़ सिखाने के बाद ढेर सारे इसी तरह के सवाल देंगी। इसके बाद वह ऐसे सवाल देगी, जिनके बारे में बच्चे जानते हैं कि उसी विधि का उपयोग करना है। जब वह घटाने पर पहुंच जाएगी, तब भी वह काफ़ी समय तक टेस्ट या होमवर्क में जोड़कर इबारती सवाल शामिल नहीं करेगी।

E8) प्रोग्रामिंग मॉडल को मानने वाली एक शिक्षक का तर्क है, "गुणा जाने बग़ैर बच्चे क्षेत्रफल के बारे में कैसे सीख सकते हैं? आखिर, क्षेत्रफल पता करने के लिए लम्बाई और चौड़ाई का गुणा तो करना ही होगा।" आप इस शिक्षक के साथ सहमत हैं या असहमत? क्यों ?

प्रोग्रामिंग मॉडल सीखने की प्रक्रिया यह है कि बच्ची को शुरू में उसके द्वारा प्रदर्शित क्षमताओं से अन्तिम अपेक्षित व्यवहार तक ले जाना। इस प्रक्रिया को छोटे–छोटे टुकड़ों में या उप–चरणों में बाँटा जाता है। प्रत्येक उप चरण में सीखने के एक कार्य को एक उत्प्रेरक के रूप में बनाया जाता है। इस उत्प्रेरक के उपयुक्त जवाबों को चुनकर अभ्यास के माध्यम से पुष्ट किया जाता है। अनचाहे जवाबों को हटा दिया जाता है। बच्ची के व्यवहार के प्रत्येक 'टुकड़े' को सीखना है और उनमें महारत हासिल करनी है। आखिर में जो व्यवहार हम बच्ची से चाहते हैं उसे हासिल करने के लिए जवाबों की इस श्रृंखला के जरिए सीखना पूरा हो जाता है।

उदाहरण 2 : मान लीजिए बच्ची को प्राकृतिक संख्याओं का जोड़ सीखना है। पहला चरण यह पता करने का होगा कि क्या उसे 1 से 50 या 1 से 100 तक की गिनती याद है? (इसे भी छोटे–छोटे टुकडो या उप–चरणों में बांटा जा सकता है।) अगला चरण संख्याकों को लिखने का होगा। यह चरण 0 से 9 लिखने से शुरू होकर आगे बढ़ेगा। तीसरा चरण ऐसी संख्याओं के जोड़ का होगा जिनका योग 9 तक हो। इन सबको सिखने के बाद ही अगला चरण शुरू किया जाएगा। इस चरण में बच्ची को 10 से बड़ी संख्या को लिखने और एक अंक की संख्याओं का जोड़ करने की ओर ले जाया जाएगा। इस प्रकार से व्यवहारों की एक श्रृंखला बच्ची का अंग बनती जाएगी। इस प्रक्रिया के दौरान बच्ची को लगातार बताया जाएगा कि क्या सही है और उसकी कौन सी प्रतिक्रिया ग़लत है।

इस तरीके में गुणा कैसे सिखाया जाएगा? गुणा को मूलतः '8 गुणा 4 बराबर क्या? जैसे सवालों के जवाब देने की क्षमता के रूप में देखा जाता है। ऐसा सवाल होने पर उम्मीद होती है कि बच्ची फौरन '32' कहे। बच्ची अगर इस सवाल के कई जवाब दे, और उनमें से अगर हर बार सही को चुना जाए, तो यह जवाब सही के रूप में स्थापित हो जाएगा। बाकी जवाबों को गलत कहकर बस हटा दिया जाएगा। ऐसा करते हुए यह नही सोचा जाएगा कि बच्ची इस जवाब तक कैसे पहुंची। इस तरीके में इस बात का कोई महत्व नहीं है कि उसने जवाब में '40' कहा (शायद 10 x 4 के अपने ज्ञान से अंदाजा लगाकर) या 2 कहा या कोई अन्य संख्या बताई। ऐसे शिक्षक की इस बात में कोई दिलचस्पी नहीं होती कि बच्ची ने किस किस्म की गलती की है और इस गलती से उसके अवधाराणात्मक विकास के बारे में क्या पता चलता है? यह नहीं सोचा जाता कि क्या यह गलती सिर्फ याद कर पाने की कमी के कारण है या अनुमान के एहसास का अभाव भी इसमें झलकता है?

इस विधि में यदि हम बच्ची से बड़ी संख्याओं का गुणा करवाना चाहें तो उसे पहाड़े और गुणा विधि के नियम याद होने चाहिए। गुणा विधि के हर चरण,एक अंक की संख्या, दो अंकों की संख्या, हासिल व बकाया, शून्य के साथ क्या करें? को थोड़ा–थोड़ा करके सिलसिलेवार बताया जाएगा। इस प्रशिक्षण के परिणामस्वरूप होगा यह कि यदि किसी बच्ची ने अभी 42 x 5 की गणना की है, तो भी 42 x 6 = ? हल करने के लिए उसे पूरी प्रक्रिया फिर से दोहरानी होगी।

E9) ऊपर बताए गए दो मॉडलों में से किसी एक का पालन करने वाली शिक्षक बच्चों को बीजगणित या ज्यामिति का कोई प्रमेय* सिखाने के लिए क्या तरीका अपनाएगी?

अब यह देखते है कि प्रोग्रामिंग मॉडल में मूल्यांकन कैसे किया जाता है। इस मॉडल को लागू करने वाली शिक्षक यह जांच कैसे करती है कि बच्ची वास्तव में कुछ सीख चुकी है? वह इस बात पर गौर करती है कि जब बच्ची ने प्रोग्राम में कदम रखा था तब और शिक्षण प्रक्रिया के अंत में उसकी क्षमताओं और व्यवहार में कौन से अंतर साफ नजर आते हैं। जो व्यवहार के उन परिवर्तनों पर है जो दूसरों को नजर आए। इस नजरिये के मुताबिक किसी बच्ची ने तैरना तभी सीखा है जब वह पानी में होने पर अपनी इस नई क्षमता का प्रर्दशन कर पाए। जिस बच्ची ने गुणा करना सीख लिया है उससे उम्मीद की जाती है कि वह गुणा की विधि का उपयोग करके इसका प्रर्दशन कर सके। वास्तव में, शिक्षक बच्ची को कुछ परिचित सवाल देकर उसकी समझ का मूल्यांकन करती है। बच्ची को अनजाने सवाल कभी नहीं दिए जाते, चाहे वे उसी तरह के क्यों न हो जो वह पहले कर चुकी है। यदि बच्ची गलत उत्तर दे तो इस बात को कोई नही पहचानता कि शायद उसने थोड़ा सीख लिया है। बच्ची को सीखा हुआ तभी माना जाता है, जब वह पूछे प्रश्न का शिक्षक द्वारा सिखाया गया जवाब देकर दूसरों को दिखा दे कि उसने सीखा है और उसका जवाब सही है।

अब तक हमने जिन दो मॉडलों की चर्चा की है, उनमें सीखने के जरिये जो परिवर्तन हम लाना चाहते हैं उसे सीखने के पृष्टीकृत व्यवहार के रूप में समझा जाता है। इसका मतलब यह है कि यदि आप चाहते हैं कि कोई बच्ची एक क्षमता या व्यवहार का प्रदर्शन करें तो आप उससे बार–बार इसका अभ्यास करवाएं। जब वह आपकी इच्छा के अनुसार करें, तो आप उसको अच्छा बताते हुए उसका उत्साह बढ़ाए। जब वह गलती करें तो आप अपनी नाराजगी प्रकट करें और उसे दंड दें। जैसे– यदि किसी बच्ची को घटाना सीखना है तो वह एक तरह की संख्याओं को घटा–घटाकर घटाने का अभ्यास करेगी। एक ही तरह के सवालों को हल करने की क्षमता के संदर्भ में उसका मूल्यांकन किया जाएगा। ऐसा करते हुए, सही होने पर उसे शाबाशी मिलेगी और गलती करने पर या किसी अन्य विधि (जो सही भी हो सकती है) का उपयोग करने पर उसे डांट पड़ेगी।

इस रवैये का नतीजा यह होता है कि बच्चे नहीं समझ पाने को छिपाने के तरीके ढूंढ़ते हैं और वे ऐसा दिखाने की कोशिश करते हैं कि वे बात सीख और समझ गए हैं। जैसे– इन मॉडलों के जरिए सीखने वाले बच्चों के सामने जब संख्याओं से सम्बंधित इबारती सवाल रखे जाते हैं, तो वे कहते है :

"यदि मुझे किसी सवाल में 'ज़्यादा' या 'कुल गिलाकर' जैसे शब्द दिखें, तो मैं समझ जाती हूँ कि इन संख्याओं को जोड़ना है।" या "मैं सवाल में दी गई संख्याओं को देखती हूँ यदि संख्याएं 86 और 51 जैसी हैं तो मैं इन्हें जोड़ देती हूँ या गुणा कर देती हूँ, लेकिन अगर संख्याएँ 86 और 5 हैं तो मैं भाग कर देती हूँ।"

E10) बैंकिंग मॉडल और प्रोग्रामिंग मॉडल के बीच क्या समानताएँ हैं?

सीखने के दो मॉडलों पर विचार कर लेने के बाद, अपने आप से यह सवाल पूछिए कि क्या ये मॉडल इस बात को समझने के लिए काफी हैं कि बच्ची क्या कर सकती है ?

इसका जवाब देने के लिए शायद आपको निम्नलिखित दो समस्याओं पर गौर करने की जरूरत होगी :

(क) यदि आप से कहा जाए कि व्हेल हालांकि मछली जैसी दिखती है लेकिन वास्तव में वह एक स्तनधारी है, तो व्हेल के बारे में वे कौन सी बातें होंगी, जो आपको बगैर बताए ही मालूम हो जाएगी? (जैसे कि वह स्थिरतापी होगी)

(ख) आपको संख्या 1986110 दी गई है। इस संख्या के बारे में 5 तथ्य लिखिए जो आप जानते हैं कि सत्य है।

इन सवालों का जवाब देते हुए आप किन दिमागी प्रक्रियाओं से गुजरे? क्या आपने अवधारणाओं के बीच नए संबंध जोड़े? क्या आप इनसे संबंधित गुणों का अनुमान लगा पाए?

प्रोग्रामिंग मॉडल और बैंकिग मॉडल दोनों ही यह नहीं मानते कि बच्ची के दिमाग में विचार बनाने की या अवधरणाओं के बीच नए संबंध बनाने की क्षमता होती है। नई जानकरी को समझने व व्यवस्थित करने की क्षमता को ये दोनो मॉडल नहीं समझा सकते। क्या आपको लगता है कि ये मॉडल परिकल्पना बनाने, अनुमान लगाने, अटकल लगाने, तर्क करने, निष्कर्ष निकालने की क्षमताओं को समझा सकते है? इनमें से किसी भी क्षमता को इन दो मॉडलों में कोई स्थान नहीं दिया गया है।

दोनों ही मॉडलों मे बच्ची से उम्मीद की जाती है कि वह रूखे ढंग से कुछ तथ्य दोहरा दे और बगैर सोचे या बदले किसी प्रक्रिया को लागू कर दे। लेकिन बच्चों का व्यवहार और उनकी क्रियाएँ कुछ और ही कहानी कहते हैं। इस अंतर को समझने के लिए सीखने का एक और मॉडल है। इस मॉडल में माना जाता है कि सीखने वाले सीखने की प्रक्रिया के सबसे सचेत हिस्सा हैं।

सीखना यानी समझ का निर्माण

सीखने के जिन दो नजरियों को हमने देखा, वे सिखाने के कई पहलुओं को समझाने में असफल हो चुके हैं। उनमें यह नहीं माना जाता कि दुनिया का एहसास बनाने या उसे समझने में बच्ची का दिमाग सक्रिय होता है। इन मॉडलों के अनुसार सीखने की पूरी प्रक्रिया में बच्चों की कोई भूमिका नहीं रहती। शिक्षक द्वारा दी गई जानकारी को ग्रहण करने में बच्ची जो भी गलती करे उसे इनाम और दंड की एक व्यवस्था द्वारा दूर किया जाना चाहिए। ये मॉडल नहीं मानते कि बच्ची की गलतियों से हमें उसके सोच की धारा का पता चलता है। इन मॉडलों में यह नहीं माना जाता कि गलतियाँ एक सक्रिय दिमाग का प्रमाण हैं।

बुद्धि परीक्षण विकसित करते हुए स्विस मनोवैज्ञानिक पियाजे ने 1920 के आसपास ही यह समझ लिया था कि बच्चों की गलतियाँ हमें बतातीं है कि वे कैसे सोचते हैं? गलतियों का उपयोग कैसे उनको सीखने में मदद देने के लिए किया जा सकता है? हमें सिखाने के अपने तौर–तरीकों का आधार एक ऐसे मॉडल पर करना चाहिए जिसमें बच्चे की बुद्धि व संज्ञान की इस सक्रिय प्रकृति को मान्यता दे।

सिखने का वह नजरिया जो सिखने वाले को सीखने की प्रक्रिया में एक सक्रिय कर्ता (अर्थात् आसपास के भौतिक व सामाजिक परिवेश को जानने की सक्रिय कोशिश में जुटा हुआ) मानता है, रचनावादी (constructivist) मॉडल कहलाता है। इस मॉडल के मुताबिक बच्ची अपने आस पास की दुनिया और लोगों के साथ सम्पर्क के आधार पर अपनी समझ बनाती (निर्मित करती) है। यदि आप इस मॉडल के आधार पर पढ़ाएंगे,तो आप बच्ची को अपने दिमाक पर जोर डालने तथा विभिन्न पहलुओं के बारे में सोचने को प्रेरित करेंगे। आप कोशिश करेंगे कि वह, आपके कुछ सहयोग के साथ स्वयं अवधारणाओं की छानबीन करे। आप बच्ची को ऐसे मौके देंगे जहां उसे सवाल हल करने की अपनी विधि खोजने के लिए जुझना पड़े। इसमें आप जरूरत पड़ने पर उसकी मदद करेंगे। आप बच्ची को ऐसे सवाल देंगे कि जिनके हल एक जैसे नहीं है। और उम्मीद करेंगे कि वह हर सवाल से निपटने के तरीके खुद ढूढें। इस तरीके में जरूरी होगा कि आप यानी शिक्षक, बच्ची के साथ चर्चा करें कि उसने क्या किया है और उसे अवसर दें कि वह जिस अवधारणा को सीखने की कोशिश कर रही है उससे जुड़े तरह–तरह के सवाल हल कर सके।

उदाहरण 3 : फातिमा कक्षा 2 के बच्चों को तिकोन व उनके गुणों से परिचित कराने की योजना बना रही थी। उसने चार्ट पेपर से तिकोन व अन्य आकृतियाँ काट लीं। उसकी योजना बच्चों को इन विभिन्न वस्तुओं से खेलने देने की थी। वह ऐसी गतिविधियां देने की सोच रही थी जिनके जरिए बच्चे छानबीन करेंगे कि तिकोन क्या होता है? रोजमर्रा के जीवन में उन्हे तिकोन कहां दिखाई पड़ते हैं, तिकोन के गुण क्या है, वह वृत्त से अलग कैसे हैं? आदि। अगली कुछ कक्षाओं में उसे उम्मीद थी कि वह अलग–अलग किस्म के तिकोनों के चित्रों के माध्यम से उन्हे मूर्त से अमूर्त की ओर ले जाएगी।

हर चरण पर वह कोशिश करेगी कि बच्चे अपनी समझ की चर्चा आपस में भी करें और उससे भी करें। उसका मानना है कि इस तरह से बच्चों की तिकोन की अपनी समझ बनने में मदद मिलेगी। वह कुछ गतिविधियों के ज़रिए ही बच्चों की समझ की जांच करने की योजना भी बनाएगी।

क्या इस उदाहरण से आपको कुछ अन्दाजा मिला कि इस मॉडल मे बच्ची से सीखने संबंधी अपेक्षाएं क्या हैं? रचनावादी मानते हैं कि बच्ची ठोस वस्तुओं पर क्रिया करके सीखती है। कोई भी अनुभव बेकार नहीं होता। कोई भी काम हो, उसे करते हुए, बच्ची कुछ न कुछ सीखती है। कोई भी प्रमेय हो, बच्ची उसकी उपप्रमेयों को सुलझाने का प्रयास कर सकती है। वह नई प्रमेय के प्रूफ ढूंढने की कोशिश कर सकती है और अपने साथियों के साथ इस प्रमेय व इसके प्रूफ की चर्चा तार्किक ढंग से कर सकती है। इस मॉडल को मानने वाले यह उम्मीद करेंगे कि कोई बच्ची संख्याओं की श्रेणियों मे पैटर्न खोजने का प्रयास करने की क्षमता रखती है। वह भी उम्मीद करते हैं कि बच्ची आंकड़ों में से व्यापक पैटर्न खोज सकती है, उस पैटर्न को खोजने की प्रक्रिया को व्यक्त कर सकती है और यह भी बता सकती है कि उस प्रक्रिया का इस्तेमाल क्यों किया गया?

इस तरह की समझ से यह अर्थ निकलता है कि बच्ची सवालों के जवाब देने की क्षमता हासिल करे और अवधारणाओं के बीच नई नई कड़ियाँ जोड़ने में अपना दिमाग लगाए। सीखने का यह नजरिया निश्चित तौर पर उस नजरिए से अलग है। जहां सिर्फ जाने पहचाने सवाल हल करने होते है। (बैंकिंग मॉडल) यह नजरिया इस बात पर जोर देता है कि नए सवालों और नई समस्याओं के जवाब खोजने के लिए बच्ची अपनी क्षमताओं का उपयोग सोचकर करे।

E11) गणित सीखने के सन्दर्भ में रचनावादी मॉडल के तहत् सीखने की अपेक्षाओं के कुछ और उदाहरण दीजिए।

E12) निम्न में उदाहरण सहित, तीन अन्तर बताइए:

(क) बैंकिंग मॉडल और रचनावादी मॉडल।

(ख) प्रोग्रामिंग मॉडल और रचनावादी मॉडल।

E13) अपने किसी एक पाठ के उद्देश्यों पर विचार करके देखिए कि वे उद्देश्य किस मॉडल के सबसे निकट हैं। (शिक्षण योजना)

सीखने के बारे में अपनी समझ के अनुसार हम अपने दिमाग मे सीखने के अलग–अलग मॉडल बनाते है। हममें से कुछ लोगों का विश्वास होता है कि बच्चे सीखना नहीं चाहते। इस मामले का सिद्धांत और शिक्षण का तरीका इस बात पर जोर देगा कि बच्चों में सीखने की इच्छा कैसे जगाई जाए, या उन्हे उनकी मर्जी के खिलाफ कैसे सिखाया जाए।

दूसरी ओर हममे से कुछ लोग मानते हैं कि बच्चे हमेशा सीखने के लिए उत्सुक रहते हैं, बशर्ते कि उन्हे सीखने के काम में मकसद नजर आए। इस मामलें में सीखने का सिद्धांत बिल्कुल अलग होगा।

शिक्षक व बच्ची के बीच के हर क्रियाकलाप पर इस बात की छाप होती है कि शिक्षक सीखने के किस मॉडल को मानती है। हम सभी अपनी कक्षा में या सीखने–सिखाने की प्रक्रिया में इन मॉडलो, या इनके मिले जुले रूप का इस्तेमाल करते हैं, हालांकि हो सकता है कि हम अनजाने में ऐसा करते हों।

सारांश

1) सीखने का मॉडल सीखने की पूरी प्रक्रिया का नजरिया होता है–सीखना क्या है? क्या सीखा जाना है? सीखने वाले के गुण तथा उपयुक्त सीखने के तरीके का चयन।

2) बैंकिंग मॉडल के लक्षण, जिसमे सीखने के तथ्य याद करने व वापिस बोलने के तुल्य माना जाता है।

3) प्रोग्रामिंग मॉडल के लक्षण, जिसमें सीखने का अर्थ होता है। ऐसे प्रोग्रामों की एक श्रृंखला का पालन करना जो किसी दिए गए सवाल को सुलझाने के लिए शिक्षक बताती है।

4) सीखने का रचनावादी नजरिया।

❀❀❀❀❀❀❀

पाठ – 11

शिक्षण की प्रचलित प्रथाएं

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- शिक्षण के प्रचलित तरीके
- कक्षा में रचनावाद
- आत्मविश्वास से सीखना
- आकलन
- सारांश

परिचय

पिछले पाठ में हमने सीखने से संबंधित विविध विचारों को समझने की कोशिश की थी। सीखने के कई पहलू होते हैं और हम जो भी करते हैं, उससे सीखते हैं।

इस पाठ में हम रचनावादी ढांचे से सीखने–सिखाने की प्रक्रिया की खोजबीन करेंगे। हमारा लक्ष्य होगा कक्षा की घटनाओं कें माध्यम से आपको सीखने व सिखाने के बुनियादी रचनावादी सिद्धातों से परिचित कराएँ क्योंकि रचनावादी ढांचा सिखाने का बाल संवेदी (child- sensitive) नजरिया है। यह इस मान्यता पर काम करता है कि बच्चे कक्षा के अन्दर व कक्षा के बाहर सीखते हैं।

चित्र 1 : बच्चों के अनुभवों को आधार बनाइए

हम उदाहरणों के माध्यम से यह समझेंगे कि छोटे बच्चे कक्षा के बाहर ज्यादा सीखते हैं। इनकी तुलना उन तकनीकों के उदाहरणों से करेंगे जिनका उपयोग आपके आसपास शिक्षक आम तौर पर करते हैं तथा हम ऐसा क्या करे जिससे कि स्कूल में आने वाले अधिकाधिक बच्चे गणित सीखें।

उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- कक्षा में शिक्षण की प्रचलित प्रथाओं का विश्लेषण कर पाएंगे।
- रचनावादी कक्षा के महत्वपूर्ण लक्षण बता पाएंगे।
- सीखने के रचनावादी सिद्धांतों पर आधारित सिखाने के तरीकों को पहचान पाएंगे।
- सीखने–सिखाने के रचनावादी सिद्धांतों की तुलना सीखने–सिखाने की आम समझ से उभरे सिद्धांतों से कर पाएंगे।

शिक्षण के प्रचलित तरीके

पिछले पाठ के कई सिद्धांत रचनावादी दृष्टिकोण को परिभाषित करते हैं। यदि हम इस दृष्टिकोण से सहमत हैं, तो कक्षा की कौन सी प्रक्रियाएं, सीखने में मददगार होंगी? इसके लिए अपने आस–पास आम तौर पर प्रयोग में आने वाले शिक्षण के तरीकों का विश्लेषण करना होगा।

चूंकि कक्षा में क्या किया जाना है और कैसे किया जाना है, इन दो वस्तुओं को एक दूसरे से अलग नहीं किया जा सकता। कक्षा में अधिकांश शिक्षण प्रायः चार बातों पर निर्भर होता है :

1) इस बात की समझ कि कोई विषय–विशेष कैसे पढ़ाया जाना है?

2) इस बात की समझ कि बच्चों को सिखाने के लिए प्रोत्साहित कैसे किया जा सकता है?

3) सीखने की प्रक्रिया के बारे में प्रचलित मत

4) शिक्षक किस हद तक अपने सिखाने के तरीकों पर गौर करती है?

बिन्दु (1) से अधिकांश लोग मानते हैं कि विषय को उस क्रम में पढ़ाया जाना चाहिए जिस क्रम में बड़े मानते हैं कि उसका विकास हुआ हैं तथा सारे सीखने वालों के लिए सिखाने का एक ही क्रम होगा। आम कक्षाओं में विषय का प्रस्तुतिकरण पढ़ाई जाने वाली विषयवस्तु को लेकर शिक्षक की समझ पर निर्भर करता है। अतः यह जरूरी है कि शिक्षक के पास उस विषय की तथा उसे पढ़ाने के ढंग की अच्छी समझ हो।

चित्र 2 : खोजबीन को बढ़ावा देना? यहां तो नहीं!

हम किसी भी सेवा–पूर्व शिक्षक प्रशिक्षण कार्यक्रम के पाठ्यक्रम को देखे तो इसकी संरचना में यह मानकर चला जाता है कि छात्र–शिक्षक की किसी एक विषय, जैसे गणित में, पर्याप्त जानकारी पहले से ही है। पाठ्यक्रम के दो प्रमुख हिस्से– गणित सिखाने की विधियां और सीखने से संबंधित मनोविज्ञान व सिद्धांत होते हैं। समस्या यह है कि इन दो हिस्सों का परस्पर सम्बन्ध छात्रों को कभी प्रस्तुत नहीं किया जाता। इसलिए हो सकता है कि शिक्षक के दिमाग में इनका आपसी संबंध कभी न आए, न तो प्रशिक्षण के दौरान, न वास्तव में पढ़ाते समय। अतः जब शिक्षक वास्तव में पढ़ाना शुरू करती है तो वह दो में से एक तरीका अपनाती है – या तो वह पाठ्यपुस्तक में विषय के प्रस्तुतीकरण से चिपकी रहती है, या उस विधि को अपना लेती है जिसका उपयोग स्वयं

उसके शिक्षक ने उसे गणित सिखाने के लिए किया था। ये दोनों तरीके ज्यादातर सीखने के बैकिंग/प्रोग्रामिंग मॉडल पर आधारित हैं।

बिन्दु (2) व (3) में देखते हैं कि वर्तमान शिक्षक और उसके शिक्षकों में सिर्फ इतना फर्क होगा कि वह अपने शिक्षण का 'बाल– केन्द्रित' या 'गतिविधि– आधारित' जैसे शब्दों से वर्णन देती है। इन शब्दों का उपयोग शिक्षक प्रशिक्षण पाठ्यक्रमों में आम होता है। लेकिन कितनी कक्षाएं वास्तव में बाल केन्द्रित हैं, जहां प्रत्येक बच्ची को कोई अवधारणा सीखने के लिए उसकी आवश्यकतानुसार समय दिया जाता हो, कितने शिक्षक हैं जो बच्चों को किसी विधि/सूत्र को समझने का अपना रास्ता खोजने के लिए प्रेरित करते हैं? प्रशिक्षण के दौरान आम तौर पर शिक्षकों को पियाजे, वायगोत्स्की, ब्रुनर व अन्य व्यक्तियों द्वारा विकसित बाल मनोविज्ञान व सीखने– संबंधी सिद्धांतों से परिचित कराया जाता है। परन्तु क्या आपको नहीं लगता कि जब वास्तव में पढ़ाने की बात आती है, तो अधिकांश शिक्षण रटने, पुनरावृत्ति करने, इनाम व दण्ड पर केन्द्रित होता है? कक्षा की पूरी प्रक्रिया व्यवहारवादी सांचे में ढली होती है। तो कहां वे 'गति – विधि – आधारित' व 'बाल – केन्द्रित' कक्षाएं हैं जिन्हे रचित करने का प्रशिक्षण शिक्षकों को दिया गया है?

वास्तविकता में जो कुछ होता है वह उन सिद्धांतों पर आधारित है जो सीखने वाले के दिमाग के बारे में लोगों की रोजमर्रा की धारणाओं से बनीं हैं। यदि हम प्राथमिक शाला के गणित के पाठ्यक्रम में विषयवस्तु की प्रस्तुति को देखें तो यह बात साफ नजर आती है कि इस के बनने का आधार यह तो बिल्कुल नहीं है कि बच्चे कैसे सीखते हैं? जैसे– बच्चों को जोड़, बाकी, गुणा और भाग सिखाने से पहले गिनती सिखाना जरूरी है। इसलिए जब बच्चों को 100 तक 'गिनती आ जाए, तभी उन्हे जोड़ की धारणा से परिचित कराया जाता है। जब वे नियमानुसार जोड़ का काफी अभ्यास कर लें उसके बाद की बात घटाने पर पहुंचती है। पाठ्यक्रम में यह निर्धारण इस मान्यता पर टिका है कि सारे बच्चे सीखने में एक ही सोपानक्रमिक शृंखला के हिसाब से चलते हैं।

E1) प्राथमिक गणित की किसी पाठ्यपुस्तक से एक ऐसा उदाहरण लीजिए जिसमें कई संम्बंधित अवधारणाओं को पढ़ाया गया है। क्या इस तरीके का आधार बच्चों के बारे में बड़ों की समझ है? यदि आप बच्चों की क्षमताओं को देखते हुए एक शिक्षण विधि अपनाएं, तो जो पाठ्यक्रम उभरेगा, यह उससे कितना अलग होगा?

गणित शिक्षण के इस नजरिए में सबसे बड़ी समस्या यह है कि इसमें सीखने वाले की पृष्ठभूमि का ख्याल नहीं रखा जाता। जैसे हममें से अधिकांश लोग बच्चों को गिनती पढ़ाने के लिए यह मानकर चलते हैं कि 20 तक गिनती जानने से पहले बच्चों को जोड़ या बाकी का कोई अन्दाजा नहीं होता। हममें से कई लोग बच्चों के ज्ञान व क्षमताओं को नजरअंदाज करते हैं। अगर हम ऐसे किसी शिक्षक से एक पाठ योजना बनाने को कहें जो अपने प्रशिक्षण के दौरान सीखने के रचनावादी सिद्धांत से परिचित हो चुकी हो। तो ऐसी कितनी पाठ योजनाएँ होंगी जो बच्चों पर केन्द्रित होंगी। हम पाएंगे कि बहुत ही कम। इनमें से अधिकांश शिक्षक पर केन्द्रित होंगी कि वह बच्चों को क्या कहने/दिखाने वाली है तथा ये पाठ योजनाएं सभी बच्चों के लिए एक ही होंगी। चाहे उनके ज्ञान के स्तर और पृष्ठभूमियों में कितना ही फर्क हो।

इसीलिए एक आम कक्षा में अवधारणाओं की प्रस्तुति प्रायः बच्चों के लिए सार्थक संदर्भ में नही होती। बच्चे भी इन अवधारणाओं की प्रस्तुति के तार्किक क्रम को समझ नहीं पाते। शिक्षक स्वयं भी नहीं समझ पातीं कि बच्चों को अमूर्त अवधारणाएं सीखने को प्रेरित कैसे करे। अतः वह पढ़ाने के आम तरीकों पर लौट जाती है। वह कोशिश करती है कि एक छात्र शिक्षक के रूप में उसे जो पढ़ाया गया था, उसकी अपनी समझ कक्षा में आजमाए – वह बेहतर चार्ट आदि का उपयोग करते हैं जिनसे बच्चे अच्छे से नकल उतार लें और नए – नए

तरीके आजमाते हैं जिनसे बच्चे, अर्थ की चिन्ता किए बगैर रट कर अभ्यास कर लें। इसके बाद भी जब वह देखते हैं कि बच्चे गणित को न तो समझ पाते हैं, न पसन्द करते हैं तो वह इसका दोष उनकी अलग – अलग 'मानसिक क्षमताओं' पर और कड़ी मेहनत की कमी पर दे देती हैं।

चित्र 3 : शिक्षक के इस तरह से ठोस वस्तुओं के इस्तेमाल से क्या बच्चे सीख सकते हैं?

क्या आपने कभी ध्यान दिया है कि आम कक्षाओं में बच्चों को दिमाग लगाने की जरूरत नहीं पड़ती। उनसे सिर्फ यह उम्मीद की जाती है कि वे 'दिए हुए' ज्ञान को ग्रहण करेंगे। इस प्रक्रिया में उनकी और कोई भूमिका नहीं होती तथा उन्हे कक्षा की प्रक्रियाओं मे सक्रिय भागीदार नहीं माना जाता। वे मानती है कि बच्चे कोई वस्तु नहीं कर सकते, कोई नई बात नहीं सोच सकते। ज्यादा से ज्यादा वे बड़ों द्वारा कही गई बातों को दोहरा सकते हैं। यह सोचने का तो सवाल ही पैदा नही होता कि

i) शिक्षक भी छात्रों से कुछ सीख सकती है या

ii) बच्चे शिक्षक या पुस्तकों द्वारा पूछे गए सवालों का जवाब देने की बजाय कक्षा की प्रक्रियाओं में अपनी शर्तों पर ज्यादा भागीदार बनें।

चूंकि एक आम शिक्षक मानते हैं कि बच्चे 'नकल करके' सीखते हैं, इसलिए उसे लगता है कि 'प्रदर्शन' ही सिखाने का सबसे अच्छा तरीका है। अतः वह ऐल्गोरिद्म के उपयोग का प्रदर्शन कर देती है और उम्मीद करती है कि बच्चे उन सूत्रों को याद कर लेंगे। दरअसल, गणित सिखाने का उसका मूल उद्देश्य ही यह होता है कि प्रत्येक बच्ची में ऐल्गोरिद्म के सही व तेजी से उपयोग करने की क्षमता विकसित हो जाए। शिक्षक यह नहीं सोचती कि किसी इबारती सवाल को हल करने के लिए इस ऐल्गोरिद्म का उपयोग करने के लिए जरूरी है कि बच्ची उस सवाल को समझे और यह मालूम कर सके कि उसमें करना क्या है? बच्ची में इस समझ व क्षमता का विकास करना आवश्यक है। परन्तु शिक्षक इसे महत्वपूर्ण नहीं मानती। लिहाजा शिक्षण समझ के विकास को ध्यान में रखकर नहीं किया जाता।

इस प्रकार हम देखते हैं कि गणित शिक्षण के आम तरीके बैंकिंग व प्रोग्रामिंग मॉडल की खिचड़ी हैं। यह बात छात्रों को क्या सीखना है और सीखने–सिखाने की प्रक्रिया, दोनों पर लागू होती है।

E2) प्राथमिक शाला में आम तौर पर इस्तेमाल होने वाले गणित शिक्षण के तरीकों के प्रमुख लक्षण लिखिए।

अब चर्चा करते हैं लोक शिक्षण शास्त्र के संदर्भ में सीखने–सिखाने की प्रक्रिया के एक प्रमुख अंग अर्थात् आकलन।

> **'लोक शिक्षण शास्त्र का अर्थ है' शिक्षण के सिद्धान्तों और व्यवहार की वह समझ जो समाज में आम पाई जाती है।**

उदाहरण– 1 कक्षा 6 का सौरभ '123 इंच लम्बी लकड़ी की पट्टी से 6–6 इंच के कितने टुकड़े काटे जा सकते हैं?' को हल करने में लगा हुआ था। (चित्र 4) सौरभ के शिक्षक ने उसे 5 में से 3 अंक दिए। एक अंक दशमलव को गलत जगह लगाने के लिए काटा गया। दूसरा अंक काटा गया था क्योंकि उसने यह नहीं बताया था 2.05 किस वस्तु को दर्शाता है। शिक्षक जो उत्तर चाहते थे वह था 6 इंच के 20.5 या $\left(20\frac{1}{2}\right)$ टुकड़े।

जब सौरभ का ध्यान इस ओर दिलाया गया कि 2.05 क्या दर्शा रहा है यह बताना जरूरी है।, तो उसने जल्दी से 2.05 इंच लिख दिया।

```
6 ) 123 ( 2.05
    12
    ---
    030
     30
    ---
     ××
```

चित्र 4

E3) i) ऊपर दिए गए उदाहरण से आपको उस कक्षा में इस्तेमाल की गई सिखाने के तरीके के बारे में क्या पता चलता है?

ii) क्या आप इस तरीके में कोई बड़ा परिवर्तन करना चाहेगें? यदि हां, तो क्या?

आम शिक्षण तरीकों में जो एक बात नजर नहीं आती है वह कक्षा की प्रक्रियाओं के बारे में मनन व पुनर्विचार। हममें से बहुत कम लोग ही, अकेले या समूह में, यह सोचने की कोशिश करते हैं कि हमारी कक्षाओं में क्या होता है या बच्चों के जवाबों से क्या निकलता हैं? उदाहरण 1 में जिस तरह शिक्षक ने बच्चे के साथ उत्तर का अनुमान लगाने के बारे में एक महत्वपूर्ण बातचीत का अवसर गंवा दिया, उससे प्रक्रिया के बारे में सोच विचार की कमी दिखती है।

हम अपनी कक्षाओं की निम्न बातों के बारे में सोच – विचार कर सकते हैं जैसे– कक्षा की सीखने की प्रक्रिया को समझने की दिशा में एक महत्वपूर्ण कदम बच्चों व कक्षा की प्रक्रियाओं के अवलोकन की प्रकृति व गुणवत्ता, बच्चे चौकन्ने और प्रक्रिया में भाग लेते हुए दिख रहे है या नहीं? कितने बच्चे बोले और किस तरह की बातें या सवाल किए? उन्होने पुस्तक में से या शिक्षक की बातों की नकल करने में कितना समय बिताया? उन्होने अपने आप काम करने में कितना समय व्यतीत किया? आदि।

इसके अलावा बच्चों के जवाबों और बातचीत को जोड़कर देखें कि अवधारणा की उनकी समझ क्या है? क्या वे उचित कड़ियां जोड़ पा रहे हैं या फिर उनकी समझ में अधूरापन है? किस तरह का सवाल हल करने के लिए किस तरह के तरीके इस्तेमाल कर रहे हैं? वे कैसे– कैसे तर्क का इस्तेमाल कर रहे हैं? इस तरह के प्रश्नों के उत्तरों का उपयोग यह सोचने में करना चाहिए कि आगे क्या किया जाए?

कई बार हममें से कई लोग ऐसे प्रश्न खुद से पूछते हैं। लेकिन अधिकांश लोग अपने अवलोकनों के निहितार्थ को लेकर गहराई से नहीं सोचते। हम प्रायः इस बात को अनदेखा कर देते हैं कि बच्चों के उत्तर व उनका विश्लेषण बच्चों के दिमाग को समझने का झरोखा है और हमें यह बता सकता है कि वे क्या सीखे हैं? हम शिक्षकों को इस विश्लेषण का उपयोग कक्षा प्रक्रिया का आकलन करने व भावी दिशा तय करने के लिए करना चाहिए। इस तरह के सामूहिक मनन (collective reflection) से विचार उत्पन्न करने व कक्षा प्रक्रिया को ज्यादा सार्थक बनाने में मदद मिलेगी।

E4) एक शिक्षक को अपने छात्रों के उत्तर, उनके चेहरे के भाव और उनका आम व्यवहार रिकॉर्ड करना चाहिए। यह क्यों महत्वपूर्ण है?

कक्षा में रचनावाद

हम तीन उदाहरण (केस स्टडीज) को देखेंगे जो पढ़ाने के रचनावादी नजरिए के मुख्य लक्षणों को सामने लाते हैं।

सिखाने से सीखने तक : खोजबीन और सवाल पूछना

उदाहरण 2: नफीसा कक्षा 3 के साथ पहली बार अन्तर्क्रिया कर रही थी। वह कक्षा की खूबियां व कमियां समझना चाहती थी। उसने कक्षा को छोटी–छोटी टोलियों में बांट दिया और बच्चों को गणित का लिखित कार्य दिया। प्रत्येक टोली को कार्यों का एक एक सेट दिया गया था। इसमें उन्हे हासिल या उधार वाले या बिना उसके जोड़ व बाकी की क्रियाएं करनी थी। शिक्षक टोली–टोली घूम कर अवलोकन और टोलियों व अलग अलग बच्चों की मदद कर रही थी। इन अन्तर्क्रियाओं के दौरान वह टोली में कोई पूरक प्रश्न छोड़ देती जिससे उन्हे अपने सवाल से जूझने में मदद मिलती। या वह उनसे कोई सवाल पूछ लेती, जिसका जवाब देते हुए उन्हे अपने मूल सवाल को सुलझाने में मदद मिलती। हरेक बच्ची से बात करते हुए नफीसा का रवैया मित्रतापूर्ण व सहयोगी होता था। कभी–कभी उसके प्रश्न बच्ची को उत्तर की ओर ले जाते और कभी कभी वह कोई ऐसा सवाल पूछती कि उसका उत्तर तभी दिया जा सकता था जब बच्ची की समझ स्पष्ट हो।

9 वर्षीय नीलम टोली A में थी। उसने उधार वाली बाकी की मानक ऐल्गोरिद्म का उपयोग करते हुए (i) बाकी का सवाल हल किया, फिर (ii)

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{r} 962 \\ -439 \\ \hline 523 \end{array} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{r} 29 \\ +39 \\ \hline 68 \end{array}$$

इसमें भी हासिल वाला ऐल्गोरिद्म ही लागू होता है और नीलम ने इसे कुछ हद तक अंगुलियों पर गिनकर पूरा किया।

नफीसा की रूचि हर बच्चे की समझ के स्तर को जानने में थी। इसलिए वह टोली A में बैठ गई और बच्चों से बातचीत करने लगी। उसने पूछा, "हम 1 हासिल क्यों लेते हैं?" नीलम ने कोई कारण नहीं दिया; उसका उत्तर सिर्फ इतना था, "1 को नीचे 8 के पास लिखना गलत है।" उसने पूछा "1 को 8 के पास लिखना गलत है ?" टोली के अन्य बच्चे भी जवाब नहीं दे रहे थे। शेष टोलियों तो दिए गए सवालों को हल कर रही थीं; इसलिए शिक्षक इसी टोली के साथ यह समझने को बैठ गई कि वे किस तरह हल करते हैं।

E5) स्कूल वर्ष के प्रारम्भ में जोड़ने व घटाने के सवाल देने में शिक्षक का प्रमुख उद्‌देश्य निम्नलिखित में से क्या हो सकते हैं? अपने चयन के कारण दीजिए–

i) कक्षा 3 के लिए बच्चों की तैयारी के स्तर का आकलन।

ii) पाठ्यक्रम की गतिविधियों की योजना बनाने के लिए बच्चों के सीखने के स्तर की खोजबीन।

iii) यह आकलन करना कि कितने बच्चों को जोड़ना व घटाना आता है।

नफीसा ने कक्षा में अब तक जो भी देखा, उससे उसे यह विश्वास हो गया कि बच्चों में कुछ बुनियादी हुनर हैं। वे कम से कम बराबर अंको वाली दो संख्याओं का जोड़ना व घटाना तो आराम से कर लेते थे। अतः संख्या तथ्यों के लिए वे अपनी याददाश्त के भरोसे नहीं थे।

नीलम से बात करते हुए नफीसा समझ गई थी कि कुछ बच्चे हासिल की विधि का उपयोग कर सकते थे हालांकि वे यह नहीं समझते थे कि यह क्यों कारगर होती है? परन्तु अब भी वह कक्षा के अपने आकलन से संतुष्ट नहीं थी। अतः उसने और जांच करने की ठानी। उसने नीलम से कहा कि वह 29 और 4 को जोड़े और इस तरह लिखे मानो वह बोर्ड पर लिख रही हो। साथ ही साथ, मुद्दे पर ध्यान केन्द्रित करने के लिए उसने पूरी टोली से कहा कि वे नीलम के उत्तर (1) के बारे में सोचें।

4 को 2 के नीचे लिखने से पहले नीलम का हाथ 9 के नीचे थोड़ा रूका। इसके बाद उसने संख्याओं को जोड़कर 69 प्राप्त कर लिया। नीलम जो कुछ कर रही थी उसे देखकर नफीसा हैरत में पड़ गई। उसने नीलम की विचार प्रक्रिया को टटोलने शुरू किया।

नफीसा : यह यहां क्या लिखा है?

नीलम : 29 धन 4

(1)
$$\begin{array}{r} 29 \\ +4 \\ \hline 69 \end{array}$$

नफीसा : बराबर कितने ?

नीलम : 69

इस बिन्दु पर टोली में कुछ बच्चे बुदबुदाने लगे कि 69 सही नही है। परन्तु उन्हें यह भी लगा कि जो तरीका नीलम उपयोग कर रही है वह तो सही है। शिक्षक ने कोई जवाब न देते हुए इन्तजार किया।

E6) नीलम को गलत उत्तर निम्नलिखित में से किन कारणों से मिला और क्यों?

i) उसने गलत विधि का उपयोग किया।

ii) उसने ऐसी विधि का उपयोग किया जिसे वह समझती नहीं।

iii) उसने लापरवाही से एक गलती कर दी।

थोड़ी देर बाद नफीसा ने नीलम से पूछा कि क्या उसे यकीन है कि 29 और 4 मिलकर 69 होते हैं?

नीलम : कुल मिलाके ?

नफीसा : हां कुल मिलाके।

नीलम : नहीं

(2)
$$\begin{array}{r} 29 \\ +4 \\ \hline 33 \end{array}$$

नफीसा : 29 और 4 कितने होते हैं ?

नीलम ने कागज के निचले हिस्से में बड़ी संख्या में लाइनें खीचीं, उन्हे गिना, कभी–कभी अपनी उंगलियों पर गिना, और कहा 33, इससे टोली में खूब जोश पैदा हो गया। बच्चे एक–दूसरे से बात करने लगे और बुदबुदाने लगे, '33 सही है या 69?', 'नही, नही, उसने गलत किया है। दोनों बार एक ही उत्तर आना चाहिए''। थोड़ी देर शिक्षक इस बात को सुनती रही और फिर नीलम के साथ अपनी चर्चा जारी रखी (शेष टोली के साथ भी)।

नफीसा : 33 ठीक, तो फिर यह 69 कैसे हो गया (लिखित कार्य की ओर इशारा करते हुए)?

नीलम : ओह! वह तो इसलिए कि मैंने इस तरह नहीं किया (लाइनों की ओर इशारा करते हुए)। अरे, यह (69) तो गलत है।

एक बार फिर टोली में बुदबुदाहट शुरू हो गई। नीलम समझ गई थी कि गिनकर जो उत्तर आया है, वह 69 से अलग है, इसलिए उसने 69 को काटकर 33 कर दिया।

नीलम ने (2) लिखे हुए सवाल को देखा और उसे बदलकर फिर से वही कर दिया जो (1) में था। इसके बाद तो टोली में जोर शोर से बहस शुरू हो गई। अब तो अन्य टोलियों ने भी रूचि लेना शुरू कर दिया और वे टोली A के बच्चों के कन्धों के ऊपर से झाँकने लगे। शिक्षक ने यह सारी उत्तेजना देखी और सोचा कि क्या इस पूरी कक्षा में चर्चा की जाए। किन्तु अन्ततः उसने थोड़ी और छानबीन करने का फैसला किया।

नफीसा : तो जब तुम इसे कागज पर करती हो तो 69 आता है और जब लाइनें खींचकर करती हो तो कितना आता है?

नीलम : 33 क्योंकि इसमें आप कुल मिलाकर सबको जोड़ते हो। परन्तु यहां (कागज की ओर इशारा करते हुए) ऐसा नहीं करते।

नफीसा : 10 धन 1 कितने होते हैं? कागज पर लिखकर मुझे बताओं।

$$\begin{array}{r} 10 \\ +1 \\ \hline 20 \end{array}$$

नीलम : क्या मैं अपनी उंगलियों पर गिन लूं?

नफीसा : जरूर।

नीलम (अपनी उंगलियों फैलाकर) : हम एक शून्य नीचे लिखेंगे और 1 और 1 हुए 2।

इसके बाद शोरगुल व उत्तेजना फैल गई और कुछ बच्चे 'नही, नही' कह उठे।

शिक्षक समझ गई कि नीलम तथा कुछ अन्य बच्चों के लिए भाषा बहुत महत्त्व रखती है। जब उन्हे 'धन' शब्द कहा जाता है तो लिखित संख्याओं और वस्तुओं दोनों मामलों में जोड़ की वह विधि लागू कर देते हैं जिसे वे पूरी तरह समझते नहीं। जब उनसे कहा जाता है 'कुल मिलाके' तो वे लिखित संख्याओं व वस्तुओं दोनों पर गिनने की प्रक्रिया लागू करते हैं। नफीसा ने विचार किया कि ऐसा क्यों होता है? उसने निष्कर्ष निकाला कि 'कुल मिलाके' बच्चों के लिए वस्तुओं की कुल संख्या के लिए स्वाभाविक शब्द है। बच्चे आम जीवन में वस्तुओं को जोड़ते समय इसी शब्द का इस्तेमाल करते हैं। 'धन' एक स्कूली शब्द है जिसका सम्बंध एक विधि से है जिसे नीलम व उसके कुछ सहपाठी नहीं समझते। क्या बच्ची की समस्या एक इबारती सवाल को औपचारिक गणित की भाषा में न बदल पाना है?

नफीसा ने तय किया कि बच्चों के लिये 'धन' व 'जोड़' के अर्थ और उनकी ऐल्गोरिद्म की समझ पर काम करने की जरूरत है। उसे यह भी लगा कि कुछ बच्चे ऐल्गोरिद्म में उलझ गये हैं, उन्हे संख्याओं का पर्याप्त एहसास नहीं है और स्थानीय मान को लेकर वे चक्कर में है। उसने देखा कि कुछ बच्चे गिनने के लिए अब भी उंगलियों या लाइनों का इस्तेमाल करते हैं और उन्हें ऐसे कार्य देने होगें जो उन्हे इस सहारे का उपयोग करने से हटाएं और वे संख्याओं के साथ अमूर्त स्तर पर आत्मविश्वास के साथ काम कर पाएं। इन लगभग एक दर्जन बच्चों को लिखित संख्याओं व ऐल्गोरिद्म के उपयोग के अभ्यास की जरूरत थी।

इस मनन के फलस्वरूप नफीसा ने तय किया कि अगले दिन वह बच्चों का ध्यान उन अलग–अलग शब्दों पर केन्द्रित करेगी जिनका अर्थ 'जोड़ना' होता है। उसके सामने चुनौती यह थी कि नीलम व उसके सहपाठी ऐल्गोरिद्म के उपयोग के बारे में सोचे और साथ–साथ स्थानीय मान की अवधारणा को समझ पाए। उसे यकीन था कि उसकी कक्षा 3 के कई बच्चों को अभी भी 'हासिल' व 'उधार' में दिक्कत थी। उसने उन वस्तुओं की सूची बनाई जो बच्चे सरलता से कर लेते थे; और उन वस्तुओं की भी सूची बनाई जहां उन्हे अभ्यास की जरूरत थी। इस आधार पर उसने बच्चों के साथ अपनी अगली मुलाकात की योजना बनाई।

नफीसा के अगले कुछ पाठ तीन–तीन, पांच–पांच और फिर दस के समूह बनाने पर केन्द्रित रहे। तीलियों के गट्ठर, दस–दस की पट्टियों और समूहो के चित्रों के माध्यम से धीरे धीरे बच्चे सीख पाए कि 20 में 2 का सम्बंध बीस वस्तुओं से है।

E7) यह उदाहरण लिखित कार्य और वास्तविक वस्तुओं (चित्रों) के साथ किए गए अंकगणित के बीच अन्तर को उभारता है। गणित की कक्षा के संदर्भ में इसका क्या महत्व है?

E8) आपके अनुसार शिक्षक ने निम्नलिखित के बारे में क्या सूझबूझ हासिल की:

i) भाषा किस तरह से बच्चों के गणित सीखने को प्रभावित करती है?

ii) बच्चो की ऐल्गोरिद्म की समझ?

E9) बच्ची ने क्या किया था और शिक्षक के साथ अन्तर्क्रिया के दौरान उसने क्या सीखा? टोली के अन्य सदस्यों ने क्या सीखा?

E10) उपरोक्त उदाहरण में शिक्षक जब नीलम के साथ अन्तर्क्रिया कर रही है, तो सीखने के कौन से सिद्धांत लागू हो रहे हैं?

E11) क्या आपको लगता है कि शिक्षक द्वारा बच्चों के साथ समूह बनाने की गतिविधि करवाना ठीक था? आप बच्चों के साथ और क्या–क्या करते?

उदाहरण 1 में हमने यह दर्शाया है कि कक्षा में हर बच्ची की अपनी सोच के बारे में जानने के लिए शिक्षक क्या कर सकती है। ऐसा करते हुए शिक्षक बच्ची को स्वयं अपनी सोचने की प्रक्रिया पर मनन करने व प्रश्न करने का अवसर भी प्रदान कर रही है। हमने यह भी दिखाने की कोशिश की कि शिक्षक के लिए यह जानना कितना जरूरी है कि बच्ची जैसे सोच रही है, वैसे क्यों सोच रही है? और उसकी शिक्षण के तरीको के संदर्भ में इसका क्या महत्व है? कक्षा को किन बातों पर काम करने की जरूरत है? व इस काम को कक्षा में कैसे लागू किया जाए कि सारी टोलियां व सारे बच्चे सक्रिय रूप से भागीदार हो पाएं, और शिक्षण रणनीति को बच्चों के लिए छानबीन करने व अपने आप काम करने की गुजांइश बनानी चाहिए।

इस उदाहरण में शिक्षक का प्रयास बच्ची द्वारा अपनाई गई प्रक्रिया को समझनी व बच्ची की समझ को आगे बढ़ाने में सहारा देना था। साथ ही वह यह समझना चाहती थी कि शेष बच्चे क्या कर व सोच रहे हैं। वह उन्हे गलती करने और उस पर डांटे जाने के भय से मुक्त होकर सोचने को प्रोत्साहित कर रही थी। इस हेतु बच्चों के बीच सम्बंधित मुद्दों पर बहस छेड़ दी। उसने पता लगा लिया कि जोड़ने व घटाने से संम्बंधित वे कौन से क्षेत्र थे जहां कक्षा के ज्यादातर बच्चों को दिक्कत आ रही थी।

शिक्षक दें मौके, बच्चे रचें ज्ञान

उदाहरण 3 : गणित की यह कक्षा गुणा पर परिचयात्मक कक्षा थी। कथित रूप से बच्चो ने 10 तक के पहाड़े रटकर 'सीख' लिए थे। शिक्षक अहमद को उम्मीद थी कि ये पहाड़े बच्चों को आ गए होंगे। अतः उसने पहाड़े बोलने को कहा (मौखिक गतिविधि), इसके बाद उसने निम्नांकित प्रकार के कई सवाल बोर्ड पर लिख दिए (लिखित गतिविधि)

$$\begin{array}{r}5\\ \times 7\\ \hline 35\end{array}\qquad \begin{array}{r}3\\ \times 4\\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r}4\\ \times 6\\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r}10\\ \times 2\\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{r}5\\ \times 3\\ \hline \end{array}$$

शिक्षक मधु कक्षा का अवलोकन कर रही थी। उसकी दिलचस्पी यह समझने में थी कि बच्चे कैसे सीखते हैं तथा वह कक्षा के रचनावादी दृष्टिकोण को समझने व विकसित करने का प्रयास कर रही थी। मधु और अहमद ने पाया कि बहुत ही कम बच्चे 'अंदाजा' लगा पा रहे थे। अधिकांश ने दी गई संख्याओं का गुणा करने की बजाय उन्हे जोड़ दिया। अहमद परेशान हो कर चिल्लाने लगा, "तुम लोगों को जोड़ और गुणा में अन्तर तक नहीं मालूम।"

मधु ने मदद हेतु बच्चों से शुरूआत में यह मौखिक सवाल पूछा : मान लो तीन दोस्त साथ– साथ मेला घूमने गए। प्रत्येक ने 4–4 बर्फियां खरीदीं, दुकानदार ने उन्हे कुल मिलाकर कितनी बर्फियां दीं ?

अधिकांश बच्चे खामोश रहे। कुछ ने हाथ उठाए। शिक्षक ने उनसे एक –एक करके जबाब देने को कहा।

अमिता : 7.

राहुल : नहीं 12.

इस स्थिति में मधु ने अहमद से अनुरोध किया कि उसे कक्षा के साथ थोड़ा समय और दे। यह सहमति हुई कि मधु 2–3 सप्ताह और पढ़ाएगी और अहमद अवलोकन करेगा। शुरू में मधु ने कक्षा को पांच टोलियों में बांटा और कहा कि वे टोली में एक–दूसरे से बातचीत और मिलकर अपनी अपनी कॉपियों में ऊपर दिए सवाल को हल करे। वह टोली टोली में, दखल दिए बगैर घूमती रही। (कुछ अवलोकन)

छः बच्चों की एक टोली में दो बच्चे अपने आप सवाल हल करने की कोशिश कर रह थे। शेष चार बच्चे आपस में बात कर रहे थे, "हमें क्या करना है? जोड़ या बाकी?" राहुल ने कहा "इनका गुणा करना है।

तुम 3 का गुणा चार तक पढ़ो और उत्तर 12 मिल जाएगा।" तभी एक और बच्ची बोल उठी "मगर यदि 4 का पहाड़ा 3 तक बोलोगे तो भी 12 ही मिलेगा।" राहुल ने दृढ़ता से कहा, नहीं वह गलत है। तुम्हे 3 का पहाड़ा 4 तक बोलना पड़ेगा।"

इस बीच मधु ने उन बच्चों को देखा जो खामोशी से अकेले–अकेले काम कर रहे थे। एक बच्चा इस तरह से रेखाएं खींचने में जुटा था: |||| |||| |||| फिर उसने 12 लिखा। तभी अचानक राहुल बोल पड़ा, अरे, मगर तुम जोड़ कर रहे हो, तुम्हें गुणा करना चाहिए। आंटी आंटी! यह जोड़ रहा है। हमें गुणा नहीं करना क्या?"

बच्चों के सामान्य अवलोकन से मधु भली भांति समझ गई कि बच्चे गुणा के औपचारिक ऐल्गोरिद्म से तब तक काम नहीं कर पाएंगे जब तक कि उनके लिए सार्थक गतिविधियों के माध्यम से उन्हें इस ऐल्गोरिद्म को परिचित न कराया जाए। इसीलिए उसने शुरूआत बच्चों को एक ऐसा इबारती सवाल देकर की जिसे वे समझते थे। परन्तु अधिकांश बच्चे भ्रमित रहे। कुछ बच्चे निरंतर 3 को 4 से गुणा करने की कोशिश करते रहे। अन्य बच्चों ने जोड़ने का प्रयास किया। मधु यह बात साफ देख पा रही थी कि बच्चे गुणा का संबंध जोड़ से बैठाने की कोशिश कर रहे थे, हालांकि थोड़ा हिचकते हुए। उसने इस बात का आकलन किया कि बच्चे क्या जानते हैं। इस बिन्दु पर उसने बच्चों के साथ एक चर्चा करने का फैसला किया।

मधु : कितने दोस्त मेले गए थे ?

बच्चे : तीन

मधु : अपनी अपनी कॉपी में तीन दोस्तों के चित्र बना लो।

सारे बच्चों ने तीन मानव आकृतियां बनाई। वे एक दूसरे के चित्र देख– देखकर हंस भी रहे थे।

मधु : प्रत्येक बच्चे ने कितनी बर्फियां खरीदीं?

बच्चे : चार – चार

मधु : अब प्रत्येक दोस्त के लिए चार – चार बर्फियां बनाते है और फिर बताओ कुल मिलाकर कितनी बर्फियां हुईं।

सारे बच्चों ने बर्फी के चित्रों को गिना और एक साथ कहा : 12

राहुल : तो हम इसे दोनों तरीके से कर सकते हैं, जोड़कर और गुणा करके!

यह था 'मार्गदर्शन से खोज' का नमूना! मधु ने ऐसे कई अभ्यासों की योजना बनाई। उसने बच्चों से भी गुणा के इबारती सवाल बनाने को कहा। उसका प्रयास यह था कि बच्चों का सांकेतिक निरूपण (representation) व ठोस और चित्रात्मक प्रस्तुतीकरण के बीच संबंध देख पाने में क्रमिक रूप से मदद करे। जब गुणा पर बच्चों की अच्छी समझ बन गई, तो बाद के पाठों में उसने बच्चों को टोलियों में निम्नांकित प्रकार के सवाल देने की योजना बनाई:

$3\times4=$	$2\times6=$	$5\times4=$	$5\times3=$	$4\times6=$
$4\times3=$	$6\times2=$	$4\times5=$	$3\times5=$	$6\times4=$

बच्चों से सवालों को पहले चित्रात्मक रूप में, फिर संख्याओं के रूप में हल करने को कहा।

इस उदाहरण में मधु ने बच्चों को सवाल का एक चित्रण देकर उन्हें चित्रण व सांकेतिक निरूपण के बीच संबंध निर्मित करने में मदद की। उसने हर हिस्से को चित्रात्मक प्रस्तुति के जरिए मूर्त बना दिया और साथ में कई "स्कैफफोल्ड" दिए। इस तरह से उसने यह सुनिश्चित किया कि बच्चे तर्क को समझ पाएं और उनकी रूचि व भागीदारी बनी रहे। यह शिक्षक द्वारा बच्चों को सम्बधित प्रक्रियाओं के प्रति संवेदी बनाने का एक उदाहरण है।

मधु बच्चों की कुदरती सूझबूझ को आधार बना कर आगे बढ़ी ताकि वे सीखने में साझेदार बने, सिर्फ शिक्षण के ग्रहणकर्ता न रहें। इसके लिए उसने उन्हें प्रश्न करने, तर्क करने और व्याख्या करने की क्षमता का उपयोग करने को प्रेरित किया। इस प्रक्रिया के दौरान शायद बच्चों में यह विश्वास बना होगा कि वे गणित कर सकते हैं, और अपने सीखने पर उनका नियंत्रण है।

E12) क) ऊपर दी गई बातचीत और गतिविधियों के दौरान राहुल ने क्या सीखा?

ख) यदि आप शिक्षक हों, तो इस कक्षा में बच्चों को गुणा सीखने में मदद देने के लिए क्या करेंगे?

E13) मेरे एक साथी को लगा कि मधु बहुत धीमी गति से आगे बढ़ी और बच्चों को एक ही तरह के अभ्यास अलग–अलग रूप में देते हुए उसने काफी समय व्यतीत किया। उसे लगा कि इतने ही समय में वह कहीं ज्यादा कर सकती थी। आप इस मत के बारे में क्या कहना चाहेंगे?

E14) निम्नलिखित में से कौन से शिक्षण सिद्धांत इस उदाहरण में विशेष रूप से उभरे हैं। अपने चयन का कारण भी दीजिए।

i) स्कैफोल्ड करना

ii) बच्चों को विचारों से बस परिचित कराना और उन्हें खेलने देना।

iii) बच्चों को अपने विचारों को आजमाने व गलतियों पर सोचने का अवसर देना।

iv) बच्चों को अवधारणात्मक छलांगें लगाने में मदद करना।

शिक्षण की बाल संवेदी विधि में बच्ची को विचारशील व भावों का एहसास करने वाला इन्सान माना जाता है। अतः सीखना सम्पन्न होने के लिए जरूरी है कि शिक्षक बच्ची की भावनाओं को भी महत्व दे। कई शोध अध्ययन दर्शाते हैं कि बच्चों को स्कूली ज्ञान का अर्थ समझने में समर्थ बनाने, खोज के उनके प्रयासों का मार्गदर्शन करने तथा उन्हें चिन्तन करने को प्रेरित करने से सम्भव है कि वे स्वतंत्र और आत्मनिर्भर सीखने वाले बन पाएं।

आत्मविश्वास से सीखना

उदाहरण 4 : पास के स्कूल में कक्षा 5 के बच्चों को भिन्नों के जोड़ और बाकी के सवाल दिए गए थे। कई बच्चों $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$ .... का उत्तर $\frac{1}{8}$ दिया था। इस उत्तर को देखकर शिक्षक ने उनके साथ कुछ 'ठोस' वस्तुओं लेकर गतिविधि करने का निर्णय लिया।

एक बच्चे के पास एक चपाती थी। शिक्षक ने उसे इस तरह बांटने को कहा कि एक एक चौथाई टुकड़ा अलग किया जा सके। बच्ची ने चपाती को चार बराबर भागों में काटकर कहा कि प्रत्येक भाग एक चौथाई है। एक अन्य बच्ची से ऐसे दो टुकड़ों को जोड़ने को कहा फिर पूरी कक्षा से पूछा कि यह कितनी है?

पूरी कक्षा ने कहा, 'आधी'।

तब शिक्षक ने पूछा कि आधे को भिन्न के रूप में कैसे लिखा जाएगा। एक बच्ची ने ब्लैक –बोर्ड पर $\frac{1}{2}$ लिखा। शिक्षक ने बच्ची द्वारा लिखे गए $\frac{1}{2}$ को बढ़ाकर $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ कर दिया।

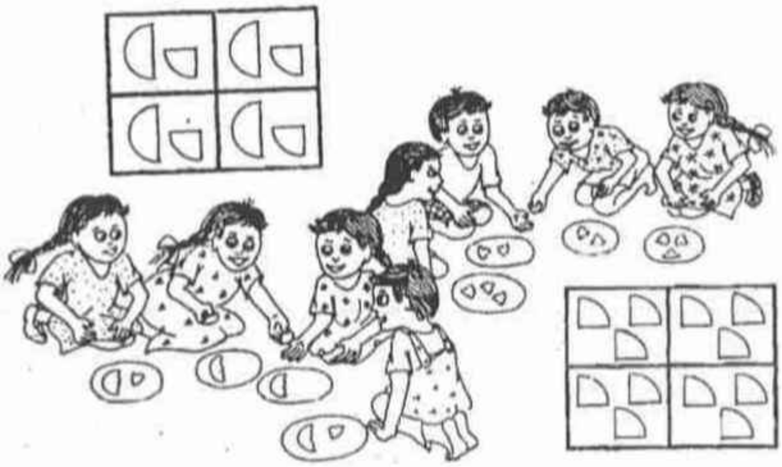
बच्चे अब भी चक्कर में थे। उनमें से कई ने पूछा, "परन्तु कैसे मैडम? जब हम 2 और 4 को जोड़ते हैं तो 8 आता है।"

E15) क्या इस परिस्थिति में शिक्षण पद्धति बदलने की जरूरत है? क्या विकास अवस्था के लिहाज से बच्चे भिन्नों को संकेत रूप में समझने के लिए तैयार नहीं हैं? या बच्चों के भ्रम का कोई और कारण हो सकता है? अपने उत्तरों के कारण भी दीजिए।

बच्चों की झलक ने शिक्षक को प्रेरित किया कि वह गणित की कक्षा में कई दिन तक ऐसी गतिविधियां करवाएं जिनमें कागज फल, पत्तियों जैसी ठोस वस्तुओं को भागों में बांटना हो।

अलग अलग किस्मों के 'पूरे' (whole) को (जैसे 1 चपाती रूपी 'पूरा' या 5 संतरों से बना 'पूरा') इस्तेमाल करते हुए उसने बच्चों को भिन्नों की गतिविधियों में जोड़ा। उसने भिन्नों को प्रस्तुत करने के लिए विभिन्न स्थितियों का उपयोग किया।

जैसे बच्चों से कहा कि 3 चपातियों को 4 बच्चों में बराबर बांटें और फिर प्रश्न पूछा : प्रत्येक बच्चे को कितनी चपाती मिलेंगी? शिक्षक को यह देखना रोचक लगा कि बच्चे कितने अलग– अलग ढंग से भाग करते हैं। जैसे एक तरीका यह था कि पहले दो चपातियां बांट दी जाएं ताकि प्रत्येक को एक चौथाई मिले।



चित्र 5

एक अन्य बच्चे ने एक एक चपाती का विभाजन किया। प्रत्येक बच्चे को $\frac{1}{4}$ चपाती तीन बार।

बांटने के विभिन्न तरीकों पर चर्चा करते हुए शिक्षक उन्हें अनौपचारिक रूप से भिन्नों की अवधारणा और संक्रियाओं से परिचित करा रही थीं। बच्चों का, विभाजन के विभिन्न तरीकों पर ध्यान दिलाने से उन्हें इस काम में मजा आने लगा। बच्चों को बिल्कुल बराबर–बराबर हिस्से वाले टुकड़ों को एक बार में ही प्राप्त करने की जरूरत नहीं थी, (पहले तरीके में)। वे यह भी पता करते जा रहे थे कि $\left(\frac{1}{2}\text{ चपाती } + \frac{1}{4}\text{ चपाती}\right)$ और $\left(\frac{1}{4}\text{ चपाती } + \frac{1}{4}\text{ चपाती } + \frac{1}{4}\text{ चपाती}\right)$ बराबर है; इसलिए $\left(\frac{1}{2}\text{ चपाती}\right)$ बराबर $\left(\frac{1}{4}\text{ चपाती } + \frac{1}{4}\text{ चपाती}\right)$। बच्चों के लिए यह बराबरी ज्यादा सार्थक है।

अगली कक्षा में शिक्षक ने पहले किए गए भाग के तरीकों से संबंधित और गतिविधियां कीं। उसका मानना था कि इससे बच्चों को सोचने, मनन व अपनी समझ निर्मित करने के लिए बढ़ावा मिलेगा। इस प्रक्रिया में सवाल हल करने के प्रयास में बच्चे अपने दम पर जूझते थे। वे टोलियों में सम्भावनाओं पर चर्चा करते। उन्हें प्रोत्साहित किया जाता कि वे एक–दूसरे के हल को चुनौती दें और अपने द्वारा प्रयुक्त विधियों की एक एक सामूहिक समझ बनाएं। जिन बच्चों को भिन्नों की संक्रियाओं में दिक्कत आती, उन्हें अपने विचार व्यक्त करने के ज्यादा अवसर दिए जाते और मूलभूत प्रक्रियाओं को समझने में मदद के लिए और उदाहरण दिए जाते। जैसे– उनसे कहा जाता कि वे दिए गए कार्य का दृश्य चित्रण करें और इसके इस्तेमाल से उसे हल करने का प्रयास करें। हर बार वे जो कुछ करते उसे एक–दूसरे को बताते व स्वयं अपनी प्रगति की जाँच करते। उनके उत्तरों का उपयोग करके उनका ध्यान इस्तेमाल होने वाली विधियों की ओर दिलाया जाता। उनसे यह भी बात होती कि कहां ये विधियां काम करती हैं, कहां नहीं, और क्यों। उन्हें भिन्नों के साथ काम करने का आत्मविश्वास हासिल होने लगा।

E16) इस प्रकरण में शिक्षक ने सीखने के किस सिद्धांत का उपयोग किया? भिन्न सिखाने की कम से कम दो और गतिविधियां सुझाइए जो इन सिद्धांतों पर आधारित हों।

E17) एक उदाहरण द्वारा भिन्न सिखाने के लिए शिक्षकों से आमतौर पर अपनाई जाने वाली प्रक्रिया का वर्णन कीजिए। इस तरीके और ऊपर के उदाहरण में प्रयुक्त तरीके में क्या प्रमुख अन्तर है।

हमने तीन कक्षाओं में होने वाली ऐसी प्रक्रियाओं के उदाहरणों को देखा जो रचनावाद के विभिन्न पहलुओं को उभारती हैं। पहली **बात रचनावादी कक्षा में शिक्षक की भूमिका** से संबंधित है। वहाँ हर बच्ची को खोजबीन करने व अपनी सोच के अनुरूप आगे बढ़ने में मदद करती है और अपना सीखने को पक्का करने का रास्ता ढूँढ़वाया जाता है (स्कैफोल्डिंग)। यह तभी हो सकता है जब शिक्षक बच्चों को नजदीक से जाने, उनके स्कीम व स्कीमा का अवलोकन व आगे विकास करने में उनकी मदद करे। शिक्षक को प्रत्येक बच्चे की निजी क्षमताओं व भावनाओं के प्रति संवेदनशील होना भी जरूरी है।

दूसरी बात **बच्चों की परस्पर अन्तक्रिया** से संबंधित है। रचनावादी कक्षा में बच्ची को यह स्वीकार करने में कोई झिझक नहीं होती कि उसने नहीं सीखा और उसे मदद चाहिए। उसे इस बात का डर नहीं होता कि उसे कम अकल कहकर उसका मखौल बनाया जाएगा। किसी सवाल को हल करने में अपने द्वारा प्रयुक्त प्रक्रिया को व्यक्त करने में उसे कोई भय नहीं होता, तब भी नहीं होता जब उसका उत्तर बाकी बच्चों से अलग हो। बच्चे एक–दूसरे की मदद व परस्पर सहयोग से काम करते हैं, अपने सहपाठियों को बुद्धू या मूर्ख नहीं मानते ।

तीसरी बात अनुशासन से सम्बन्धित है। बच्चों से यह उम्मीद नहीं की जाती कि वे चुपचाप बैठकर शिक्षक की बात सुनेंगे और अपनी बात कहने की इच्छा को दबाए रखेंगे। इसके विपरीत उनसे उम्मीद होगी कि वे सक्रिय रहें, अपनी बात कहें, एक दूसरे से सलाह मशवरा करें। इससे उन्हें धीरे–धीरे अपने सीखने में आत्मनिर्भर होने में मदद मिलेगी और सीखने की अपनी क्षमता पर विश्वास उत्पन्न होगा।

E18) रचनावादी कक्षा के बारे में जो तीन बातें ऊपर बताई, गईं उनमें आप और क्या जोड़ सकते हैं?

आकलन

आमतौर पर लोग सीखने का अर्थ, दिए गए ज्ञान को ग्रहण करना मानते हैं। बच्ची, जानकारी की निष्क्रिय ग्रहणकर्ता है जिसे इस दिए हुए ज्ञान को इकट्ठा करके रखना है। वे तभी बच्चों का आकलन करते है जब मानते हैं कि वे सीख चुके हैं, ज्ञान को याद व आत्मसात् कर लिया गया है। उनके आकलन का लक्ष्य सिर्फ सीखने के फल की जांच करना होता है। वे सीखने की प्रक्रिया को पूरी तरह अनदेखा कर देते हैं।

'सीखने का फल' शब्द का अर्थ है कि आकलन इस पर केन्द्रित होगा कि बच्ची सिखाए गए सवाल हल कर पाती है या नहीं अथवा कक्षा में दी गई परिभाषाएं व व्याख्याएं पुनः दोहरा पाती है या नहीं। सीखने के इस मॉडल में आकलन के दो ही परिणाम हो सकते हैं – या तो बच्ची दिया गया कार्य करके सही उत्तर प्राप्त कर ले या ऐसा करने में नाकाम रहे। यदि वह सफल रहती है, तो उसे पूरे अंक मिलेंगे; यदि नहीं कर पाती, तो शून्य। 'सही उत्तर' की परिभाषा में कभी– कभी यह भी शामिल होता है कि वह बीच के चरण सही सही बता पाए और 'तरीका' दर्शा पाए। जैसे यदि कोई बच्ची अनुपात का सवाल कर रही है, तो अपेक्षा यह होगी कि वह कक्षा में बताए गए तरीके के अनुसार आगे बढ़े और उस तरीके में जरूरी सारे चरण दर्शाए। यह माना जाता है कि विभिन्न स्कूली विषयों (अर्थात् दिए गए ज्ञान) में प्राप्त अंक सीखने के सर्वोत्तम सूचक हैं।

दूसरी ओर, रचनावादी मॉडल में ऐसे कार्य दिए जाते हैं जिनसे यह सामने आए कि बच्ची कैसे सोचती है और सवाल को हल करने के लिए कैसे अपना तर्क विकसित करती है। बच्ची का आकलन इस बात पर निर्भर नहीं होता कि वह कौन–कौन से चरण लिखती है, बल्कि इस बात पर निर्भर होता है कि वह उस कार्य को कैसे कर रही है या अपने तरीके से व्याख्या कैसे करती है। इससे यह सुनिश्चित करने में मदद मिलती है कि सारे बच्चे सार्थक रूप से व्यस्त हैं। शिक्षक ऐसे कार्य भी तैयार कर सकती है जिनमें बच्चों को यह मनन करने का अवसर मिलता है कि उन्होंने क्या सीखा। उनका अवलोकन करके, उनके विचार प्रक्रिया जानने का व यह समझने का अवसर मिलता है कि उन्होंने क्या सीखा है। यह आकलन कोई अलग प्रक्रिया नहीं, बल्कि शिक्षक व सीखने वालों की अन्तर्क्रिया का अभिन्न अंग है। **आकलन का उद्देश्य है सीखने की प्रक्रिया को मार्गदर्शन देना, केन्द्रित करना और उसे आगे बढ़ाना।**

आमतौर पर बच्चों के साथ निरन्तर बातचीत और काम तथा कुछ बच्चों के साथ केन्द्रित काम जरूरी है, यह मोटेतौर पर समझने में मदद देने के लिए कि बच्चे क्या सोच रहे हैं और किन वस्तुओं से जूझ रहे हैं? इससे बच्चों के दिमाग में उपस्थित स्कीमा को जानने में भी मदद मिलती है। इस आकलन से शिक्षक कक्षा के ज्यादातर बच्चों की जरूरत समझकर एक और उपयुक्त तरीके को विकसित कर सकते हैं। बच्चों की गलतियों पर प्रतिक्रियाएं भी आकलन से सम्बंधित एक महत्वपूर्ण पहलू है। आम कक्षा में हम बच्ची को एक लिखित परीक्षा (नैदानिक, दक्षता या उपलब्धि परीक्षा) देते हैं और उसके उत्तर इकट्ठे कर लेते हैं। इसके बाद हम इन उत्तरों की जांच करते हैं। और इन्हें गलत या सही घोषित करते हैं। तब हम सारे सही उत्तरों को देखकर प्रत्येक बच्ची को एक निश्चित अंक या ग्रेड देते हैं, जो उस बच्ची के प्रदर्शन का मूल्य होता है। इस प्रक्रिया में हम बच्ची की समझ का विश्लेषण करने का प्रयास नहीं करते। जैसे हम यह समझने की कोशिश नहीं करते कि क्यों किसी बच्ची ने जोड़ का एक सवाल सही किया और दूसरा गलत। लिखित परीक्षाओं के माध्यम से आकलन का पूरा जोर यह दर्शाने पर होता है कि बच्चों ने क्या क्या गलत किया है, किन्तु इससे यह पता नहीं चलता कि यह गलत क्यों किया गया। क्या यह जांची गई अवधारणा की अधूरी समझ या गलत व्यापकीकरण या प्रश्न की गलत व्याख्या या प्रश्न को बिल्कुल ही न समझ पाने का परिणाम है। चूंकि यह आकलन बच्ची के तर्क की खोज का प्रयास ही नहीं करता, इसलिए इसमें यह भी पता नहीं चलता कि सवाल में बच्ची ने क्या सही किया है।

इन परीक्षाओं से यह भी पता चलता है कि बच्ची ने सही उत्तर कैसे प्राप्त किया। उसकी प्रक्रिया की समझ व किस तर्क के आधार पर उसने सही उत्तर दे दिए हैं? जैसे– एक बच्ची ने भिन्नों $\frac{3}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{5}$ को सही क्रम $\frac{1}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{5}$ में जमा दिया। इसे देखकर कुछ लोग शायद कहें कि वह भिन्न 'जानती' है। जब उससे पूछा कि उसने सही उत्तर कैसे निकाला, तो उसने कहा, क्योंकि 1, 3 से कम है और 3, 4 से कम है।"

इसीलिए सिर्फ सही, गलत के निशान लगाने और अंक देने से आगे जाना आवश्यक है। यदि बच्चों की उत्तर की पुस्तिकाओं का विश्लेषण किया जाए और एक ही प्रश्न पत्र के विभिन्न प्रश्नों में बच्चों के हलों का अंतर्संबंध देखा जाए, तो कुछ हद तक हम बच्चों की समझ का आकलन कर सकते हैं। किन्तु वास्तव में किसी बच्ची की समझ का आकलन करने के लिए, हमें उसके उत्तरों में परस्पर संगति, सवाल करते समय उसका अवलोकन व उससे बातचीत करनी होगी। अगर हम उससे उसकी 'गलतियों' के बारे में बातें करें तो हम शायद पाएं कि उन उत्तरों तक पहुंचने का उसके पास ठोस कारण हैं। यही है गलतियों के बारे में रचनावादी नजरिया।

इसे और अधिक स्पष्टता से देखने के लिए एक बच्ची की कॉपी की निम्नांकित उत्तर पर विचार करे –

$$\begin{array}{r} 29 \\ +\ 15 \\ \hline 44 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 19 \\ +\ 22 \\ \hline 14 \end{array}$$

इस बच्ची के बारे में आपका आकलन क्या होगा? क्या सिर्फ उसे एक सही उत्तर पर अंक देकर रह जाएंगे? या उसकी गलती का विश्लेषण करके उसकी समझ का आकलन करने का प्रयास करेंगे? और यदि सिर्फ पहला सवाल ही दिया जाता तो क्या हम यह मान लेते कि उसे जोड़ना आता है? या क्या आप उसे दूसरे किस्म के सवाल या इबारती सवाल भी करने को देते? दरअसल किसी बच्ची की किसी अवधारणा की समझ को परखने के लिए जरूरी है कि अवधारणा से संबंधित विभिन्न किस्म के सवाल दिए जाएं। तभी इस बारे में कुछ जान पाएंगे कि वह इस अवधारणा के बारे में क्या जानती है और उसे इस अवधारणा से संबंधित क्या कठिनईयां हैं। उसके उत्तरों का विश्लेषण करने के बाद उससे बातचीत करके ही हम उसकी तर्क प्रक्रिया को समझ सकते हैं। और तभी हम उसे उसकी गलती को समझने में मदद देकर पाएंगे।

जहां तक रचनावादी कक्षा में आकलन का मसला है, वर्कशीट का उद्देश्य बच्चों को सोचने व अवधारणाओं के साथ सक्रिय रूप से जुड़ने को प्रेरित करना है। अतः निर्धारित कार्य बच्ची द्वारा पहले किए जा चुके कार्य की पुनरावृत्ति नहीं होते। ये नए कार्य होते हैं, जिन्हें बच्चे सामूहिक रूप से भी कर सकते हैं। बच्ची द्वारा वर्कशीट के सवाल करने की प्रक्रिया में शिक्षक भी भागीदार बन जाती है। वर्कशीट का उद्देश्य बच्चों को यह बताना नहीं है कि कौन तेज है और कौन नहीं, बल्कि बच्ची को सीखने का अवसर देना व शिक्षक को यह समझने में मदद करना है कि आगे कैसे बढ़े। यह अलग तरह से बनी और उत्तरों का विश्लेषण भी अलग ढंग से किया जाता हैं। उत्तरों का विश्लेषण सावधानीपूर्वक इस ढंग से किया जाता है कि बच्चों की समझ के रास्ते में आ रहे तार्किक व अवधारणात्मक मुश्किलों के पैटर्न उभरे। 'सही व गलत' दोनों तरह के उत्तरों की जांच होती है। किन्तु 'गलत' उत्तरों का विश्लेषण यह समझने के लिए किया जाता है कि बच्चे किस तरह सोच रहे हैं। इसके अलावा, बच्ची के काम का भलीभांति आकलन करने के लिए शिक्षक उससे संवाद करे और जब वह सवाल कर रही हो, तब उसका नजदीकी से अवलोकन करें। इस प्रक्रिया से बच्ची को उस अवधारणा या संक्रिया को समझने व विकसित करने में भी मदद मिलेगी जिसे सीखा जा रहा है।

इस प्रकार एक रचनावादी कक्षा में आकलन व सीखना अलग–अलग प्रक्रियाएं नहीं हैं – आकलन बच्चे की सीखने की प्रक्रिया का एक सहजीवी अंग है।

E19) एक आम कक्षा और एक रचनावादी कक्षा में बच्ची के आकलन के उद्देश्यों में क्या अन्तर है?

E20) अपनी गणित की कक्षा में बच्चों को एक कार्य दीजिए। आपने विभिन्न बच्चों के द्वारा किए गए कार्यों और उनकी समझ का आकलन कैसे किया? इस आकलन ने आपको अपने शिक्षण के तरीके में परिवर्तन करने में कैसे मदद की ?

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नांकित बिन्दुओं पर चर्चा की :

1) शिक्षण के आम तरीकों के विभिन्न पहलू;

2) कक्षा में सीखने को बढ़ावा देने के उदाहरण;

3) शिक्षक व बच्ची की आपसी क्रिया और बातचीत के कुछ तरीके जिनसे बच्ची को

   – सवाल हल करने की क्षमता विकसित करने में मदद मिलेगी

   – गणितीय तर्क करने की अपनी क्षमता विकसित करने में मदद मिलेगी

   – एक आत्मविश्वासी, खुद अपने बल पर सीखने वाली बनने में मदद मिलेगी।

4) रचनावादी कक्षा में आकलन का उद्देश्य है कि शिक्षक को अपने सीखने वालों को समझाने में मदद मिले और समझ बेहतर बने कि वह आगे कैसे बढ़े ताकि बच्चों को सीखने में मदद मिले।

5) आकलन शिक्षण का अभिन्न अंग है। यह बच्चों के साथ शिक्षक की अन्तर्क्रिया के दौरान नियमित व निरन्तर रूप से चलना चाहिए।

6) बच्चे अपने सीखने के बारे में ज्यादा आत्मविश्वास महसूस करेंगे यदि आकलन समेत पूरी शिक्षण प्रक्रिया उनके व शिक्षक के बीच एक मिली जुली कोशिश हो।

पाठ – 12
निरूपण

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- निरूपण
- अमूर्त सोच का विकास
- अवधारणात्मक व प्रक्रियात्मक ज्ञान
- सारांश

परिचय

इस पाठ में हम ऐसे उदाहरणों को देखेंगे जो ये दर्शाते हैं कि बच्चे गणित करते समय व अपनी गणितीय समझ बनाते हुए अपने नुस्खे व रणनीतियाँ विकसित करने का प्रयास करते हैं। इसके लिए वे गणितीय जानकारी को निरूपित करने के विविध तरीके अपनाते हैं। ये निरूपण अलग–अलग तरह के हो सकते है। इनमें से कुछ ठोस, प्रत्यक्ष तथा इन्हें हाथों से टटोला जा सकता है जबकि अन्य निरूपण चित्रात्मक व सांकेतिक होते हैं।

जैसे–जैसे बच्चे किसी तरीके या कार्य से ज्यादा परिचित होते हैं, वैसे–वैसे उसे निरूपित करने की आवश्यकता कम होती जाती है। नई अवधारणाओं को समझने हेतु शुरूआत में ठोस निरूपणों का ज्यादा सहारा लेते हैं तथा धीरे–धीरे अर्द्ध–अमूर्त व अमूर्त निरूपणों के साथ काम करने की क्षमता विकसित करने लगते हैं।

इसी प्रकार हम गणितीय ज्ञान दो भागों में बांट सकते हैं अवधारणात्मक व प्रक्रियात्मक तथा इससे सीखने–सीखाने के महत्त्व पर भी चर्चा व सवाल को हल करने की प्रक्रिया का वर्णन करेंगे।

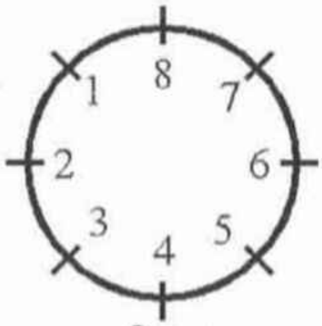
उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- यह समझा पाएंगे कि गणित की अमूर्त दुनिया से निपटने के लिए निरूपण की क्या आवश्यकता है।
- गणित सीखने के संदर्भ में निरूपण व अमूर्त में सोच की प्रक्रिया में बच्ची की सहजता को बढ़ाने के उपाय सुझा पाएंगे।
- अवधारणात्मक व प्रक्रियात्मक ज्ञान में फर्क कर पाएंगे और गणित के संदर्भ में दोनों तरह की समझ को विकसित करने में बच्चों को मदद दे पाएंगें।

निरूपण

सवाल : "8 व्यक्तियों को एक गोल मेज पर बैठाने के कितने तरीके हो सकते हैं?" इस सवाल को हल करने के लिए मैंने निम्नांकित चरण अपनाए–



चित्र 1

1) मैंने एक गोला खींचकर उसकी परिधि पर आठ बिन्दु लगा दिए। (चित्र 1)

2) मैंने सोचा इस सवाल के लिए क्रमचय (permutation) (1,2,...8), (2,3,.......8,1) ,...., (8,1,.......,2,7) आदि बैठने के एक ही तरीके को निरूपित करते हैं।

3) अतः इस सवाल को सुलझाने के लिए मुझे उपरोक्त बिन्दु (2) को ध्यान में रखते हुए ऐसे क्रमचय खोजने होंगे जो बिल्कुल अलग–अलग हों।

4) इस हेतु मैंने 8 की बजाय 3 व्यक्तियों को बैठाने की व्यवस्था पर सोचने का प्रयास किया।

5) अन्ततः मैंने हल कर लिया, उत्तर आया $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ सवाल हल करने की प्रक्रिया को चरणों में बांटकर देखना बहुत सरल नहीं होता क्योंकि इनमें से कई चरण आपस में घुल मिल जाते हैं और कई चरण कई–कई बार दोहराए जाते है। डेविस और मेयर के अनुसार किसी भी गणितीय सवाल को हल करने के लिए हमें निम्नलिखित चरणों में से कुछ या सभी के क्रम में गुजरना होता है।

1. हमारे पास उपस्थित गणितीय जानकारी का निरूपण करना।
2. इस निरूपण का उपयोग करते हुए अपनी याद्दाश्त में उस ज्ञान की तलाश करना जो हमें इस सवाल के लिए जरूरी लगता है।
3. इस तरह प्राप्त जानकारी का नए आकड़ों पर इस्तेमाल करना और उनके बीच सम्बन्ध बनाना।
4. इन अन्तर्सम्बन्धों की जांच करना कि वे उचित है या नहीं।
5. समस्या सुलझाने के लिए ज्ञान के निरूपण से संबंधित प्रक्रियाओं, ऐल्गोरिद्म जैसे तकनीकी उपकरणों का इस्तेमाल।

इस प्रकार सवाल की स्थिति का निरूपण करने की क्षमता उसे सुलझाने के लिए जरूरी है। सवाल को हल करने के दूसरे चरण में जरूरी है कि "जिस ज्ञान को हम संबंधित समझें उसका निरूपण करे"। कभी–कभी यह चरण इतनी तेज गति से हो जाता है कि हम इसे पहचान ही नहीं पाते। लेकिन बच्चे इसे कई बार करते नजर आते हैं। जैसे– कमला के पास चार कंचे थे। सुरेश के साथ खेलते हुए उसने पांच कंचे और जीत लिए। अब उसके पास कितने कंचे हैं? "आप शायद फौरन इसे जोड़ के सवाल के रूप में पहचानने लेंगे। किन्तु जब कोई बच्ची इसे हल करने का प्रयास करती है तो इसमें दो स्पष्ट चरण होते हैं। (i) उसे दिए गए आंकड़ों का निरूपण करना। (ii) उसे 'सम्भव संबंधित जानकारी' का निरूपण चाहिए जिसके लिए उसे मानसिक प्रयास करना होगा। वह एक हाथ की चार उंगलियों से कंचे दर्शाकर और फिर दूसरे हाथ की उंगलियों से पांच और कंचे जोड़कर निरूपण बना सकती है। इसके बाद वह अपने इस पूर्व ज्ञान का इस्तेमाल कर सकती है कि उंगलियों की कुल संख्या से उसे सही उत्तर मिलेगा। कंचो के निरूपण के लिए वह उंगलियों का उपयोग करने की बजाय

शायद सही संख्या में रेखाएं खींचे। जब वह विभिन्न संदर्भों में कई सवाल सुलझाएगी, तो ये प्रक्रियाएं धीरे धीरे उसके सोच का अंग बन जाएंगी और जरूरत पड़ने पर उनका तुरंत इस्तेमाल करेगी।

अतः सवाल सुलझाने में कई चरण होते हैं इसलिए बच्चों को अपने ढंग से इन अवस्थाओं से गुजरने दिया जाना चाहिए। कुछ शिक्षक कहते हैं कि ''प्राथमिक स्कूल के बच्चे इतने छोटे होते हैं कि उनमें गणितीय तर्क करने की क्षमता हो ही नहीं सकती। कक्षा 4 तक के बच्चे निम्नांकित तरह के सरल सवाल नहीं हल कर पाते:

'मंजू के पास तीन ब्लाउज और दो स्कर्ट हैं। वह कितनी अलग–अलग जोड़ियों में इन्हें पहन सकती है?''

इस सवाल का जवाब चूंकि शिक्षक को स्पष्ट है इसलिए उन्हें लगता है कि थोड़े अभ्यास के बाद बच्ची को भी इसका हल जाना चाहिए। परन्तु जिस बच्ची को इसका जवाब मालूम न हो, उसे सबसे पहले तो ब्लाउज व स्कर्ट को निरूपित करना होगा। इसके बाद उसे यह पूर्व ज्ञान निकालना होगा कि एक स्कर्ट व एक ब्लाउज से एक ही जोड़ी बनती है और यदि उसके पास दो ब्लाउज और एक स्कर्ट हो, तो उस स्कर्ट को दोनों ब्लाउजों के साथ पहन सकती है। यानी उसके पास दो जोडियाँ होंगी। अब वह तर्क लगा कर देख सकती है कि यदि तीन ब्लाउज और एक स्कर्ट हो, तो तीन जोडियाँ बन पाएंगी और यदि एक स्कर्ट और भी हो, तो तीन जोडियाँ और बन सकेंगी। इस पूरी गणना को ठीक ठाक पाकर वह कह सकती है कि कुल 6 जोड़ियां होगीं। यह भी हो सकता है कि वस्त्रों के बारे में बच्ची की समझ या अन्य कारणों से अलग उत्तर भी आ सकते है परन्तु हम यदि सवाल सुलझाने के प्रथम चार चरणों को अनदेखा करके सीधे चरण 5 पर कूदेंगे, तो हम बच्चे की गणितीय समझ को सही विकसित नहीं कर पाएंगे।

E1) ''शून्य व एक की एक लड़ी लीजिए। प्रत्येक लड़ी में 8 ही अंक हों जैसे– 01100110, ऐसी कितनी अलग–अलग लड़ियां बन सकती हैं?'' इसे हल करते हुए उन चरणों को रिकार्ड कीजिए जिनसे होकर आप गुजरे। क्या आपने उसी तरह के क्रम का उपयोग किया जो डेविस व मेयर ने बताए हैं? यह भी देखिए कि आपने कितनी बार एक ही चरण को दोहराया और कौन से चरणों का उपयोग ही नहीं किया।

हम जानते हैं कि किसी भी सवाल को हल करने के लिए बच्चे ठोस, चित्रात्मक या अन्य सांकेतिक निरूपणों का उपयोग करते हैं। हममें से कई लोग एक ही सवाल के लिए कई निरूपणों का उपयोग कर सकते हैं। दरअसल सवाल हल करने की प्रक्रिया के दौरान हम किसी भी चरण पर अधिक सुविधाजनक निरूपण का इस्तेमाल करने लगते हैं। जैसे ऊपर किए गए क्रमचय के सवाल में, कभी–कभी हमें चित्रों का उपयोग तो कभी–कभी क्रमचय के संकेत का मैंने जिस निरूपण को चुना वह इस बात पर निर्भर था कि मैं उस सवाल को हल करने के लिए उस वक्त और क्या करना चाहती थी।

निरूपणों के बीच अदलाबदली करने में लचीलापन समर्थ गणितीय सोच का लक्षण है हर किस्म का निरूपण अवधारणा के कुछ विशिष्ट पहलुओं को सामने लाता है। लचीलेपन का मतलब एक ही किस्म के निरूपण में अदल–बदलकर पाना भी हो सकता हैं। जैसे कई हिस्सों वाले एक ही चित्र का उपयोग; हिस्से ऐसे जो सवाल के अलग–अलग पहलुओं को उभारें। लचीलेपन का अर्थ दो बिल्कुल ही अलग किस्म के निरूपणों के बीच अदल–बदल भी हो सकता है, जैसे– समीकरण व ग्राफ के बीच। बहु–चरणीय सवालों को हल करने के लिए कई तरह के निरूपणों का उपयोग जरूरी हो सकता है।

बच्चों के पास उन अमूर्तताओं के निरूपण के कई तरीके होते हैं जिन्हें वे समझने का प्रयास कर रहे हों। ये निरूपण ठोस वस्तुओं या शारीरिक क्रियाओं के रूप में हो सकते हैं। जैसे, 3 गुड़ियां और 4 गुड़ियां जोड़ने

का सवाल सुनते ही बच्ची के दिमाग में उतनी गुड़ियों की छवि बन सकती है या हो सकता है कि वह पहले तीन गुड़ियों के चित्र बनाए फिर चार गुड़ियों के, और फिर उन सबको गिने।

जहां तक शारीरिक क्रिया का सवाल है, यदि बच्ची को कूदने या चलने से संबंधित प्रश्न भी दिये जा सकते हैं, तो हो सकता है कि वह उस प्रश्न का निरूपण करने के लिए इन क्रियाओं को करके देखे।

E2) एक ऐसा इबारती सवाल लीजिए जिसमें जोड़, बाकी व गुणा तीनों करने हैं। सोचिए कि कोई बच्ची इसे ठोस, प्रतीकात्मक या चित्रात्मक निरूपण के इस्तेमाल से कैसे दर्शा सकती है?

गणितीय कार्य सुलझाने की प्रक्रिया में ठोस वस्तुओं के उपयोग से बच्ची को निरूपण करने में मदद मिलती है, जिनको वह अपने दिमाग में मौजूद ज्ञान से जोड़कर देख सकती है। एक ठोस निरूपण उपलब्ध होने से वह अपने ज्ञान संग्रह में बार–बार जाकर संबंधित ज्ञान खोज सकती है। इससे जरूरत होने पर वह निरूपण को अपने ज्ञान के ढांचे से जोड़कर देखने के एक से अधिक प्रयास कर सकती है।

इसके साथ–साथ यदि किसी बच्ची को किसी अवधारणा या प्रक्रिया से संबंधित अलग–अलग किस्म के सवाल दिये जाएं, तो वह अवधारणा का निरूपण करने के बेहतर ढंग विकसित कर पाएगी और अवधारणा को अपने दिमाग में मौजूद ज्ञान से बेहतर जोड पाएगी। आवश्यक यह है कि बच्ची जिस प्रक्रिया का उपयोग करे, उसे वह दूसरों को समझाए। इससे उसे इस्तेमाल किए गए तरीकों को पुख्ता करने में मदद मिलेगी। विभिन्न किस्म के सवालों से जूझने और मजाक बनाए जाने के डर से मुक्त होकर अपने द्वारा विकसित तरीकों के बारे में बताने के काफी अवसर मिलने से बच्ची ज्यादा बेहतर निरूपण विकसित कर पाएँगी। यदि बच्ची को सवाल हल करना सीखना है, यह विकास बहुत महत्व रखता है।

इस प्रकार प्रक्रियाओं, ऐल्गोरिद्मस और शार्टकट्स का उपयोग गणितीय सवाल हल करने की में केवल एक चरण है। प्रथम चार चरण जिनमें समस्या को समझना, उपयुक्त निरूपण बनाना, उपलब्ध ज्ञान से जोड़कर देखना और जांच करना, ये सभी अत्यंत जरूरी हैं। इनके बाद ही ऐल्गोरिद्म या प्रक्रिया का चुनाव करके उसे लागू करना सम्भव है। अतः हमें चाहिए कि बच्ची को ऐसे कई कार्य दें जिनमें उसे निरूपण की विभिन्न किस्मों में एक से दूसरी तक जाकर, उनका लचीले ढंग से उपयोग करने की अपनी क्षमता की जरूरत पड़े और यह भी जरूरी है कि हम उसे एक किस्म के सवाल सुलझाने का कोई एक ही खास तरीका न दें।

E3) कक्षा 3 के बच्चों में विभिन्न तरह की आकृतियों के साथ कार्य करने के लिए निरूपण की क्षमता विकसित हो पाए, इसके लिए आप किस शिक्षण तरीके का उपयोग करेंगे। वर्णन कीजिए?

अमूर्त सोच का विकास

कई लोग मानते हैं कि 10–11 वर्ष की उम्र में कोई बच्ची सबसे पहले अमूर्त अवधारणा का सामना करती है। ऐसा मानने का उनका कारण है कि बच्चे इसी उम्र में '**औपचारिक संक्रियात्मक अवस्था**' में प्रवेश करते हैं। कुछ लोगों का मानना है कि बच्चे स्कूल में प्रवेश के बाद ही संख्याओं व संक्रियाओं के रूप में अमूर्तता से निपटना शुरू करते हैं। जैसे– जब कोई शिशु यह व्यापकीकरण कर पाती है कि "हर बार जब वह चीखती है तो कोई न कोई ध्यान देता है", तो वह भी अमूर्त रूप में सोच पा रही है? या जब बच्ची भाषा व उसके नियमों का उपयोग शुरू करती है, तो यह भी अमूर्तीकरण का प्रयोग करने की क्षमता नहीं है?

हां, यह हो सकता है कि छोटे बच्चे सिर्फ उन्ही अमूर्तीकरण से निपट पाते हैं जो ठोस वस्तुओं से और उनके आसपास पाए जाने वाले विशिष्ट स्थितियों से सम्बन्ध रखतें हों। गणित में अमूर्तीकरण के साथ कामकाज करने में बच्चों को एक समस्या यह आती है कि ये अमूर्तीकरण– एक अलग ही दुनिया के रूप में प्रस्तुत होते हैं। यदि बच्चे विविध निरूपणों के माध्यम से इन अमूर्त अवधारणाओं को अपनी दुनिया से जोड़ पाएं तो उन्हे इन

चित्र 2 : ठोस निरूपण से अमूर्तता की ओर जाना

अवधारणाओं को समझने में मदद मिलेगी। जैसे –जैसे बच्ची के स्कीमा ज्यादा विस्तृत होते जाते हैं वैसे–वैसे उसे वस्तुओं का इस्तेमाल करके ठोस निरूपण की जरूरत कम होती जाती है। धीरे–धीरे वह पहले से ज्यादा अमूर्त निरूपणों से काम करने लगती है। जैसे– जोड़ या बाकी करते समय धीरे–धीरे वह वस्तुओं का उपयोग फिर चित्रात्मक निरूपणों का उपयोग और फिर चित्रों की बजाय वह संख्याओं और संक्रियाओं के मानसिक निरूपण से काम चलाने लगती है। अमूर्त संकेतों के साथ सहज हो पाने की यह प्रक्रिया धीमी है और इसमें समय काफी लगता है।

यदि कोई बच्ची किसी सवाल को मानसिक निरूपणों के माध्यम से सुलझा सकती है, तो इसका अर्थ यह नहीं है कि वह सारे सवालों को इस तरह से कर पाएंगी। हो सकता है कि कुछ सवालों के लिए उसे अब भी ठोस या चित्रात्मक निरूपण बनाना पड़े।

अमूर्तता की ओर बढ़ते हुए मानक प्रतीकों का इस्तेमाल करते हैं और कुछ नहीं वे कभी–कभी अपने प्रतीक भी बना सकती है। यदि वह ऐसा करती है, तो उसे इनका उपयोग संगत रूप से करना होगा। इसके अलावा, यदि प्रत्येक बच्ची द्वारा नए संकेत व अमूर्तीकरण विकसित किए जाएंगे तो आपसी संवाद में दिक्कतें पैदा हो जाएंगी। इससे अन्य बच्चे भ्रमित भी हो सकते हैं। चाहे बच्ची अपने रचे हुए प्रतीक इस्तेमाल करें, चाहे मानक प्रतीक, उसे उन अवधारणाओं से प्रतीकों को संबंधित करना है जिन्हें वे निरूपित करते हैं। यह प्रक्रिया इतनी सरल व सीधी नहीं है।

E4) भाषा के संकेत भी अमूर्त होते हैं। तब बच्ची अपनी प्रथम भाषा आसानी से अर्जित कर लेती है जबकि गणित नहीं कर पाती। ऐसा क्यों?

गणित सीखते हुए बच्ची को सिर्फ अमूर्त संकेतों से ही नहीं जूझना पड़ता। पूरा गणित ही अमूर्त प्रकृति का है। गणित अभिगृहीतों (axioms) और तार्किक रूप से प्राप्त कथनों पर टिका होता है। कई बार कथनों का कोई ठोस निरूपण नहीं होता है। किन्तु शुरूआती स्कूली गणित काफी हद तक ठोस निरूपण का उपयोग करके सीखा जा सकता है। लेकिन एक सीमा के बाद तो गणित का सीखना सांकेतिक निरूपणों पर ही आधारित होगा। अतः गणित सीखने में ठोस से अमूर्त और अमूर्त से ठोस की ओर जाने की क्षमता को शामिल करना ही होगा। इसके अलावा अमूर्त सूत्रों व निरूपणों को समझना भी इसका एक अंग होगा। जैसे–जैसे बच्ची ज्यादा गणित सीखती है, वैसे–वैसे उसे अमूर्त सोच व अमूर्त विचारों के साथ काम करने में क्षमता बढ़ानी होती है। जैसे– जब उसका सम्पर्क बड़ी संख्याओं से होता है, तो इन्हे ठोस वस्तुओं के रूप में निरूपित करना संभव नहीं रह जाता। 236 और 445 के जोड़ को, 236 वस्तुओं में 445 वस्तुएं जोड़ने के रूप में नहीं देखा जा सकता। अतः बच्ची को इन राशियों की अवधारणा विकसित करनी होगी और अन्दाजा लगाना होगा कि इनमें से प्रत्येक का अर्थ क्या है।

एक शिक्षक के तौर पर हमें चाहिए कि हम अपने सीखने वालों को ठोस निरूपणों के सहारों से दूर अपेक्षाकृत व्यापक व अमूर्त निरूपणों की ओर ले जाएं। इसके लिए शैशव से लेकर बच्चों को देखना होगा। वे सामान्यीकरण, व्यापकीकरण व अमूर्त सोच की क्षमता विभिन्न स्तर तक अर्जित करते जाते हैं। उनके अमूर्त सोच

का एक बड़ा हिस्सा अन्य अमूर्त अवधारणाओं से उभरा होता है और यही प्रक्रिया आजीवन चलती रहती है। जैसे– कोई बच्ची वस्तुओं की उठा–पटक करते करते वजन के बारे में सीख जाती है। शुरू में उसे शायद यह पता लगता है कि अक्सर ज्यादा बड़ी वस्तुओं भारी होती हैं। किन्तु जल्दी ही और अनुभवों के दौरान वह समझ जाती है कि कई बार छोटी वस्तु भी ज्यादा भारी हो सकती है – एक छोटा पत्थर प्लास्टिक की बड़ी गेंद से अधिक भारी हो सकता है। इन अनुभवों से वह एक व्यापक निष्कर्ष तक पहुंचती है कि माप वजन का एक संकेतक है किन्तु एकमात्र संकेतक नही है। हमें विभिन्न कार्यों व सवालों से तार्किक व्यापकीकरण करने की इसी क्षमता के विकास में मदद करनी है।

E5) कक्षा 2 की एक बच्ची से पूछा गया कि 8+7 कितना होगा तो उसने लिखा 15 तीलियां इसके आधार पर हम अमूर्त के साथ काम करने की उसकी क्षमता के बारे में क्या निष्कर्ष निकालें।

यहां एक गतिविधि दी जा रही है जिसमें ठोस वस्तुओं का उपयोग बच्ची को अमूर्तिकरण तक पहुंचने में मदद के लिए किया जा सकता है और ज्यादा अमूर्त निरूपणों के इस्तेमाल की ओर जाने में बच्ची को मदद देने के लिए यही गतिविधि, थोड़े बदलाव के साथ कराई जा सकती है।

गतिविधि : यह गुणा सीखने की शुरुआत करने वाले बच्चों के लिये हैं। आप इन्हें यह सवाल दे सकते हैं "एक दुकानदार के पास कंचों की 4 थैलियाँ है। प्रत्येक थैली में 5 कंचे हैं। तो कुल मिलाकर कितने कंचे हुए ?"

अब बच्चों को काफी सारी थैलियाँ व कंचे दे दीजिए और उन्हे यह सवाल इस सामान के साथ सुलझाने दीजिए। इस बात का रिकार्ड रखिए कि प्रत्येक बच्ची क्या कर रही है – इससे आपको यह जांचने में मदद मिलेगी कि संख्या जोड़, गिनती आदि के बारे में प्रत्येक बच्ची की समझ क्या है। यदि बच्चे गिनना सीख चुके हैं और संख्याओं व जोड़ की प्रक्रिया की समझ रखते हैं तो शायद उन्हें यह सवाल आसान लगेगा। हो सकता है कि वे थैलियों की जगह सिर्फ कंचों का उपयोग करें।

इस गतिविधि को विभिन्न रूपों में दोहराया जाए जिससे कि बच्चों को अन्य प्रकारों के निरूपणों का उपयोग करना पड़े और जो उन्हें अमूर्तिकरण में सहायता दे। यदि आप कुछ कंचे हटा दें और बच्चों के पास इतने कंचे न हों कि 5–5 के 4 सेट बनें, तो उन्हें मजबूरन इस सवाल को हल करने के अन्य तरीके खोजने होंगे। बच्चो को इतने ही कंचे दीजिए कि वे सवाल का आंशिक ठोस निरूपण बना सकें। मान लीजिए बच्चों के पास 10 कंचे हैं। हो सकता है कि कुछ बच्चे इनसे 5–5 के दो सेट बना लें। अब वे या तो इन दो सेट को दो बार गिनें या शेष 2 सेट की कल्पना करें और सवाल हल कर लें। दरअसल यहां भी वे एक तरह का अमूर्तिकरण ही कर रहें है। उन्होने एक स्कीमा विकसित कर लिया है जिसमें एक समूह दूसरे अनुपस्थित समूहों को निरूपित करता है। यदि छोटे बच्चों को ऐसी सामग्री के साथ काम करने को कहा जाए, जहाँ सिर्फ आंशिक निरूपण ही संभव हो, तो उन्हें बड़ी दिक्कत होती है। यहीं जरूरत है कि उन्हें अंर्तसंबंध देखने व समझने में मदद करें। कई बार तो बच्ची को एक छोटा सा सुराग भी मिल जाए तो वह सवाल हल कर लेती है। कभी कभी आपको उसके साथ काम करना होगा व समझाना पड़ेगा कि सामग्री कम होने पर सवाल में आंकड़ों के निरूपण के लिए उपलब्ध सामग्री का उपयोग क्यों व कैसे करें?

E 6) ऊपर दी गयी गतिविधि में क्या परिवर्तन किया जा सकता है जिससे इसका उपयोग बच्ची को बीजगणित प्रतीकों से परिचित कराने के लिए किया जा सके?

गणित सीखते हुए बच्ची को कई संकेत व निरूपण समाज में एकत्रित ज्ञान की बदौलत उपलब्ध हो जाते हैं। संकेतों की प्रणाली बच्ची जिस संस्कृति में बड़ी हुई उस पर निर्भर होगी। जैसे– जापान में पली बच्ची और

भारत में पली बच्ची अंको की अलग अलग पद्धतियों का उपयोग करेंगी।चूंकि समाज में इन संकेतो का लम्बे समय से उपयोग होता रहा है, इस वजह से उनमे काफी संगति होती है तथा ये बच्ची को सदैव उपलब्ध होते हैं। इस वजह से किसी समुदाय द्वारा अक्सर उपयोग किए जाने वाले संकेत बच्ची आसानी से सीख लेती है व बच्ची के समुदाय द्वारा इस्तेमाल होने वाली सांकेतिक पद्धति को चुनने का कोई नियम या आधार नहीं होता है। इस निरूपण को एकमात्र पद्धति अथवा अपरिवर्तनीय पद्धति नहीं मानना चाहिए।

E7) आप किसी बच्ची को यह समझने में कैसे मदद करेंगे कि अंकों के प्रतीकों की किसी पद्धति के चुनाव के पीछे कोई पूर्व निर्धारित नियम नहीं है?

अवधारणात्मक व प्रक्रियात्मक ज्ञान

गणित करते हुए हम सम्बधित ज्ञान को मोटे तौर पर दो वर्गों में बांट सकते हैं। (i) अवधारणात्मक ज्ञान (Conceptual Knowledge)। इसका सम्बन्ध सीखने वाले के दिमाग में अवधारणाओं के बनने व उनके विकास से है।

हममें से कुछ लोग मानते है कि यदि कोई बच्ची (या बड़ा) किसी अवधारणा का नाम या परिभाषा जानती है, तो वह उसे समझती है। परन्तु क्या ये दोनों एक ही बात हैं? जैसे– कोई बच्ची जो 'गेंद' शब्द सुनती है, उसे इसका सम्बन्ध अपने आसपास की अन्य वस्तुओं से जोड़ने के लिए सुराग खोजने होंगे। बच्ची को गेंद की अवधारणा समझने के लिए 'गेंद' शब्द पता होना यह जरूरी नहीं है। वह इसके लिए किसी अन्य शब्द का इस्तेमाल कर सकती है, जैसे– 'ठोस गोल वस्तु जो लुढ़कती और उछलती हैं। आवश्यक तो यह है कि वह अपने शब्द या पदों का इस्तेमाल संगत रूप से करे।

इस प्रकार अवधारणाओं को समझना तथा उसे परिभाषित करना अथवा नाम देना दो अलग–अलग बातें हैं। अवधारणा की समझ तब विकसित होती है जब कोई उस अवधारणा के साथ विभिन्न स्थितियों, स्तरों पर काम करे। बतौर शिक्षक हमारी कोशिश यह होनी चाहिए कि बच्ची को विभिन्न संदर्भों में अवधारणा को इस्तेमाल करने का अवसर मिले। यदि बच्ची की अवधारणा की समझ मजबूत है तो वह इस पर आधारित सवालों को हल करने के बेहतर रास्ते खोज पाने की स्थिति में होगी। उदाहरण के लिए, जो बच्ची यह समझती है कि गुणा क्या होता है, वह गुणा के किसी सवाल को सुलझाने के लिए पहाड़ों का उपयोग कर सकती है, या फिर वह एक संख्या को बार–बार जोड़कर हल कर सकती है, या वह एक संख्या को विभाजित करके बंटन नियम (distributivtiy) का उपयोग कर सकती है।

(ii) प्रक्रियात्मक ज्ञान (Procedural Knowledge) इसका सम्बन्ध किसी सवाल को हल करने के प्रक्रिया को जानने से है। जैसे– जब हम दो अंकों वाली संख्याएं जोड़ते हैं, तो इकाई से शुरू करते हैं। यदि इकाईयों का जोड़ 10 से ज्यादा है तो हासिल ले जाते हैं, आदि।

अवधारणात्मक व प्रक्रियात्मक ज्ञान के बीच गहरा संबंध हैं। एक का विकास दूसरे के विकास को आसान बनाता है। लेकिन हममें से कुछ लोग सिर्फ प्रक्रियात्मक ज्ञान के विकास पर ध्यान देते हैं और मानकर चलते हैं कि यही अवधारणात्मक ज्ञान है। जैसे– हममें से अधिकांश लोग बच्चों को सिर्फ भिन्नों की संक्रियाओं के ऐल्गोरिद्म बताते हैं। हम बच्ची से कहते हैं, "एक भिन्न को दूसरी से भाग करने के लिए भाजक को उलटकर भाज्य भिन्न में गुणा कर देते हैं।" या "भिन्नों का जोड़ करते समय हरों का लघुत्तम निकालते हैं, और फिर प्रत्येक हर का भाग लघुत्तम में देते हैं और भागफल का गुणा अंश में करते हैं। सारे अंशों में इस तरह गुणा करने के बाद उन्हें जोड़ देते हैं और लघुत्तम से भाग दे देते हैं"। यदि कोई बच्ची इस प्रक्रिया को ठीक से लागू कर दे तो हम कहते हैं कि वह 'भिन्न सीख गई है'।

इस अन्तर को समझना महत्वपूर्ण है क्योंकि प्रक्रिया को जानने का अर्थ प्रायः यह नहीं होता कि अवधारणा का विकास हो गया है। हां, यह कहा जा सकता है कि यदि बच्ची अपने प्रक्रियात्मक ज्ञान को विभिन्न परिस्थितियों में लागू कर सके, तो उसने कुछ–कुछ अवधारणात्मक ज्ञान ग्रहण कर लिया है। अतः हमारी कक्षाओं में शायद यह जरूरी है कि बच्ची का सम्पर्क अवधारणा से सम्बधित कई स्थितियों से कराया जाए जहां उसे सम्बन्धित प्रक्रियाओं को लागू करना पड़े।

E8) क्या गणित के सवालों के सही उत्तर पा लेना संबंधित अवधारणों की समझ को दर्शाता है? और इसके विपरीत, यदि किसी बच्ची के सभी उत्तर गलत हैं तो क्या इसका मतलब यह है कि वह संबंधित अवधारणों को नही समझी हैं? अपने उत्तर के कारण भी दीजिए।

E9) एक ऐसा उदाहरण बताइए जिसमें गणित का सवाल हल करती किसी बच्ची के साथ मिलकर आपने तर्क विकसित करने की प्रक्रिया की हो। इसमें शिक्षण के कौन से सिद्धांत शामिल थे?

सारांश

1) हमने इस बात पर जोर दिया है कि बच्ची अपने अनुभवों के और जो पहले से वह जानती है उसके आधार पर ही नए ज्ञान का निर्माण करती है। इसे याद करके अंदर धकेला नहीं जा सकता। वास्तव में मदद इस बात से मिलती है कि बच्ची को अवधारणा के विभिन्न पक्षों की संक्रियता से छानबीन करने के मौके मिले। समझ का ढांचा निर्मित करने के लिए यह जरूरी है।

2) हमने गणितीय सवालों को हल करने में प्रयुक्त चरणों की विस्तार में चर्चा की, खासकर उसके अलग अलग निरूपण तथा निरूपण की जरूरत।

3) बच्चों में ठोस, चित्रात्मक व प्रतीकात्मक निरूपण का उपयोग कर अमूर्त स्तर पर कार्य करने की क्षमता विकसित करने की जरूरत।

4) गणितीय ज्ञान को मोटे तौर पर दो वर्गों में बांट सकते हैं – अवधारणात्मक व प्रक्रियात्भक ज्ञान। कक्षा में शिक्षक को दोनों को विकसित करने की जरूरत है और उनके परस्पर सम्बन्ध को सामने लाने की जरूरत है।

इकाई 4 के पाठ 9, 10, 11, 12 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

पाठ 9 : गतिविधियों से सीखना

E1 चित्र में देखिए कि गतिविधि के क्या पहलू होने चाहिए। इनको देखिए और बताइए कि ये 'रटने' या 'नियम याद करने' से किस तरह भिन्न हैं। अपनी बातों के उदाहरण भी दीजिए।

E2 विभिन्न कक्षाओं के उदाहरणों की छानबीन करके बताइए कि बच्चों को सक्रिय या निष्क्रिय शिक्षार्थी बनाने के लिए शिक्षक क्या कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, बच्चों को स्वयं सवाल हल करने के मौके मिलने से वे सक्रिय बनते हैं जबकि ब्लेकबोर्ड से हल उतारने से वे निष्क्रिय बनते हैं। ऐसे और बिन्दु सोचिए।

E4 कुछ अन्य प्रश्न ये हो सकते हैं :

(1) क्या इसे खेल या पहेली माना जा सकता है? यदि हाँ तो किस प्रकार का?

(2) शिक्षक की भागीदारी किस तरह की होगी? यह गतिविधि शिक्षक के नेतृत्व में होगी या बच्चों के?

(3) क्या इसमें बच्चों को आविष्कार करने व अपने ज्ञान को विस्तार देने की गुंजाइश है?

(4) क्या इसके लिए किसी पूर्व ज्ञान की जरूरत है? कैसा ज्ञान?

(5) क्या इसमें शिक्षक या सहपाठी द्वारा स्कैफोल्डिंग की गुंजाइश है?

(6) क्या गतिविधि को आगे बढ़ाने या अन्य गतिविधियों से कड़ी जोड़ने की गुंजाइश है?

E7 यह समझना बहुत जरूरी है कि गतिवधियां एक ऐसा ढांचा देते हैं जिसमें विभिन्न अवधारणाओं को रखा जा सकता है ताकि बच्ची उनका अभ्यास कर सके। यह जरूरी नहीं है कि प्रत्येक अवधारणा के लिए हर बार एक अलग ढांचा बनाया जाए। मसलन, 'क्या फिसला और क्या लुढ़का' गतिविधि का उपयोग उछलने तथा न उछलने वाली वस्तुओं की खोजबीन के लिए भी कर सकते हैं। उदाहरणों में दी गई किसी भी गतिविधि को बदलकर या आगे बढ़ाकर अन्य उद्देश्य के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है।

गतिविधि में परिवर्तन या विस्तार सुझाते समय इन परिवर्तनों या विस्तारों के उद्देश्य बताना न भूलें।

E10 (क) हम मानकर चल रहे हैं कि आप साँप–सीढ़ी का खेल जानते हैं। सोचिए कि इसे कैसे खेला जाता है, खेल का विश्लेषण कीजिए और इसके प्रमुख लक्षण बताइए। बच्चे इस खेल को खेलते वक्त क्या करते होंगे? इसे खेलते हुए वे क्या गणित सीखते होंगे या अभ्यास करते होंगे? एक गतिविधि के विश्लेषण के लिए हमने जितने प्रश्न उठाए हैं, उनके उत्तर दीजिए।

(ख) बच्चों की टिप्पणियों में क्या गणित झलकता है? उदाहरण के लिए, 'मुझे 8 चाहिए। काश मुझे 6 और 2 आ जाए' जैसे कथन से गणित की क्या समझ झलकती है? इसी प्रकार से जब आप किसी बच्ची को यह कहते सुनें कि उसे 3 चाहिए, तो सोचिए कि उसकी समझ व तर्क क्या है। आप इस बारे में भी सोच सकते हैं कि एक बच्ची की इस बात का क्या अर्थ है कि उसके विरोधी को 2 ही मिलना चाहिए।

उपयोगी तो यह होगा कि आप कुछ बच्चों के साथ इस खेल को खेलें, उनकी टिप्पणियाँ इकट्ठी करें और उसके बाद भी अभ्यास हल करें।

E11 आपसे उम्मीद है कि आप भाग सीखने से संबंधित दो गतिविधियों का उदाहरण दें। एक गतिविधि, उदाहरणार्थ– सावधानीपूर्वक बनाया गया इबारती सवाल हो सकता है जिसमें ठोस सामग्री का उपयोग होता हो। दूसरी गतिविधि ऐसी होनी चाहिए जिसमें बच्चे को दिया कार्य शायद न लगे कि भाग से संबंधित है, लेकिन उसे करते वक्त बच्ची को भाग से जूझना ही पड़े। इन्हें बनाते समय गतिविधि के विश्लेषण के लिए जो प्रश्न थे, उनका ध्यान रखें।

E12 पहले की चर्चा के आधार पर उन पहलुओं को लिखिए जिन्हें सूची में जोड़ा जाना चाहिए। मसलन, क्या कक्षा 5 व कक्षा 1 के बच्चों को दी गई गतिविधियों की प्रकृति व उनसे अपेक्षाएं अलग–अलग होंगी? कृपया स्पष्ट करें कि ये अन्तर क्यों हैं।

पाठ 10 : सीखने की प्रक्रिया पर विभिन्न विचार

E1 इनमें से प्रत्येक परिभाषा पर गौर कीजिए। मसलन क्या हम कह सकते हैं कि दिए गए उत्प्रेरक पर अपेक्षित जवाब सीखना है? आप 'सीखने' और 'प्रतिवर्ती क्रिया' में फर्क कैसे करेंगे? (प्रतिवर्ती क्रिया का मतलब है किसी वस्तु के प्रति तुरंत (बगैर सोचे) होने वाली शारीरिक क्रिया। मसलन, जब आपके पैर पर कांटा चुभ जाता है, तो आप बगैर सोचे पैर हटा लेते हैं। दरअसल प्रतिवर्ती क्रिया का संचालन केन्द्र दिमाग नहीं रीढ़ की नसों में होती है।)

बाकी सभी परिभाषाओं का विश्लेषण उसी तरह करके देखिए कि क्या आप उनसे सहमत हैं या नहीं।

E2 बच्चों की रूचि बनाए रखने के लिए हर सम्भव गतिविधियाँ सोचिए– उन्हें कुछ अवलोकन करने को, प्रयोग करने को, किसी की नकल उतारने को, खुद से पढ़ने को, कुछ बातें पता करने को, अपनी देखी किसी वस्तु के बारे में लिखने को, वगैरह, कह सकते हैं। आपको क्या लगता है, इनमें से कौन सी गतिविधि सीखने में मदद करती है? आप कह सकते हैं कि किसी वस्तु के बारे में खुद लिखने में सीखने वाले को सोचना पड़ता है और इस तरह से वह सीखेगी।

E3 मसलन, पहाड़े या यहाँ तक कि प्रमेयों को भी याद करना। बच्चे से उम्मीद होती है कि वह पहाड़े या अन्य 'महत्वपूर्ण' तथ्य दोहरा सके। इकाई में दी गई अपेक्षाओं के अलावा तीन अपेक्षाएं सोचिए।

E4 आपने जितनी अवधारणाओं/प्रक्रियाओं को रटा था, उनमें से कितनी आपको आज भी याद हैं? आपको क्या लगता है कि जो याद रहीं वे क्यों रहीं, और बाकी क्यों भूल गए?

E5 सीखने के बैंकिंग मॉडल के अनुसार जानकारी को किसी जगह से लेकर बच्चे के दिमाग में उठाकर डालना है। सारे टुकड़े दिमाग में अलग–अलग रखे होते हैं तथा इन्हें बार–बार रटकर पुख्ता बनाया जाता है। यह सोचिए कि क्या ऐसा मॉडल यह समझा सकता है कि बच्चे संख्याओं के बीच नई–नई कड़ियाँ जोड़ते रहते हैं, नई–नई आकृतियाँ बनाते हैं और ऐसी कई वस्तुओं करते हैं जो उनके लिए नई होती हैं। यदि सीखने की समझ बैंकिंग मॉडल के आधार पर की जाए, तो इन्सानी दिमाग की इस क्षमता की व्याख्या नहीं की जा सकती। ऐसी कुछ और बातों को उदाहरण दीजिए जो इन्सानी दिमाग कर सकता है लेकिन जो बैकिंग मॉडल नहीं समझा सकता।

E6 बैंकिंग मॉडल से संचालित कक्षा में शिक्षक सीखने वालों को एक ही बात को कई बार दोहराने को कहेगी। आप पाएंगे कि कक्षा में शिक्षक जानकारी दे रहे हैं और छात्र उसे अपने दिमाग में 'जमा' करने के लिए ग्रहण कर रहे हैं। यह सोचिए कि ऐसी कक्षा की व्यवस्था कैसी होगी। यह भी सोचिए कि कौन–कौन से बदलाव लाने होंगे ताकि पूरी प्रक्रिया बच्ची के दिमाग में जानकारी भरने पर केन्द्रित न रहकर, ज्यादा सार्थक बने। मसलन, यदि अभी जोर याद करने पर है, तो इसे बदलने के लिए सिखाने के तरीके में क्या बदलाव होगा?

E7 यदि आप शिक्षक हैं, तो यह देखिए कि अगले दो दिनों में आप क्या करने जा रहे हैं। आपकी कक्षा में बच्चे क्या कर रहे हैं और उनसे आपकी अपेक्षाएं क्या हैं? क्या आप उनसे तथ्य याद करने की अपेक्षा रखते हैं, या आप उन्हें उन तथ्यों को अलग–अलग ढंग से बार–बार इस्तेमाल करने का अवसर दे रहे हैं, या क्या आप और बच्चे कुछ और कर रहे हैं? यदि आप शिक्षक नहीं हैं, तो कल्पना कीजिए कि आप कक्षा में क्या करना चाहेंगे और फिर इसी तरह उसका विश्लेषण कीजिए।

जब आप स्वयं अपनी गतिविधि का विश्लेषण कर चुके, तो किसी मित्र को ढूंढ़िए जो आपके साथ अपनी कक्षा की कोई गतिविधि की चर्चा करने को तैयार हो। इस गतिविधि का विश्लेषण भी ऊपर की तरह कीजिए।

E8 इस कथन से एक बात यह निकलती है कि जो व्यक्ति क्षेत्रफल की गणना न कर सके उसे क्षेत्रफल की कोई समझ नहीं है। इसका मतलब यह भी निकलता है कि जिन लोगों ने गुणा नहीं सीखा वे बड़ी सतह और छोटी सतह के बीच फर्क नहीं कर सकते। जब हम सतहों के क्षेत्रफल का अनुमान लगाते हैं, तो क्या हम हमेशा लम्बाई और चौड़ाई का गुणा करते हैं? क्या आप शिक्षक के मत से सहमत हैं, या आप मानते हैं कि गुणा सीखने से काफी पहले ही बच्चों को क्षेत्रफल का अन्दाजा हो सकता है।

E9 कक्षा 8 की एक शिक्षक बच्चों को त्रिकोणों की सर्वांगसमता से संबंधित एक प्रमेय पढ़ा रही थी। उसने उन्हें किताब में से इसकी एक सिलसिलेवार उपपत्ति बताई और उन्हें दोहराने को कहा। इसके बाद उसने उन्हें किताब में से ही इससे संबंधित दो अभ्यास दिए। परीक्षा में उसके प्रश्न इन्हीं उपपत्तियों को प्रस्तुत करने से संबंधित थे।

E10 इन दो मॉडलों में इस बात की समझ हू–ब–हू समान है कि बच्चे कैसे सीखते हैं और हमें कक्षा में क्या करना चाहिए। एक मॉडल में उपचरणों को इस रूप में निरूपित किया जाता है कि उस समय तक कौन से तथ्य याद कर लिए गए हैं। दूसरे मॉडल में जोर इस बात पर होता है कि उस समय तक कौन से तरीके या विधियों पर महारत हासिल हो गई है। दोनों में ही स्पष्ट तौर पर परिभाषित व्यवहारगत लक्ष्य हैं। दोनों में ही सीखने को विशिष्ट उपचरणों में बाँटा जाता है जिन्हें बारम्बार के अभ्यास द्वारा हासिल किया जाता है।

प्रोग्रामिंग मॉडल में भी बैंकिंग मॉडल की तरह छात्रों का दिमाग निष्क्रिय ही रहता है। बुनियादी तौर पर इसको आकार देती है। शिक्षक, जो वांछित व्यवहारों को चुन–चुनकर पुष्ट करती है। इस मॉडल के अनुसार जो कुछ सीखना है और जिस ढंग से उसे व्यवस्थित करना है, यह सब सीखने वाले को बताना पड़ता है। एक बार यह बता दिया जाए और दिमाग को 'प्रोग्राम' कर दिया जाए, तो वह इस ज्ञान का उपयोग नई परिस्थिति में कर सकता है।

E11 हम जानते हैं कि रचनावादी मॉडल कहता है कि बच्ची सीखने की प्रक्रिया में सक्रिय रूप से शामिल होती है। वह समझ का अपना ढाँचा विकसित करके सीखती है। रचनावादी मॉडल के मद्देनज़र गणित में सीखने में संबंधित कुछ अपेक्षाएँ होंगी नए किस्म के सवालों पर हाथ आज़माने के लिए दिए गए सवालों की छानबीन तथा संख्याओं व आकृतियों में पैटर्न खोज पाने की क्षमता, वगैरह। उसे अपने सीखने के तरीके ऐसी अन्य अपेक्षाएँ सोचिए।

E12 इस किताब में हमने कक्षा की परिस्थिति के ऐसे कई उदाहरण बताए थे जिनमें बच्चे सार्थक रूप से शामिल थे। हमने उन परिस्थितियों का भी ज़िक्र किया है जिनमें बच्चों से सिर्फ यह अपेक्षा थी कि वे जानकारी को अपने दिमाग में रख लें और/या एक–एक करके ऐल्गोरिद्म का बारम्बार अभ्यास करें और उनके इस्तेमाल में निपुण हो जाएं। ऊपर के अभ्यासों में तीन मॉडलों के प्रमुख लक्ष्यों को आप पहचान ही चुके हैं।

बैंकिंग मॉडल और रचनावादी मॉडल के बीच एक प्रमुख अन्तर यह है कि जहाँ एक में शिक्षक बच्ची के दिमाग़ में जानकारी भरी है वहीं दूसरे में बच्ची की अपनी समझ का विकास होता है। इस अन्तर का एक उदाहरण हमें पहाड़े रटने बनाम पहाड़े बनाने के रूप में दिखता है।

E13 आपने उस समय जो उद्देश्य लिखे थे या अब जो सारे उद्देश्य आप सोच सकते हैं, उन्हें देखिए। ये उद्देश्य सीखने के किस मॉडल के सबसे निकट हैं?

पाठ 11 : शिक्षण की प्रचलित प्रथाएँ

E1 प्राथमिक स्कूल की कोई भी गणित की पाठ्यपुस्तक देखिए। आप देखेंगे कि इसका हर घटक एक सरल रैखिक क्रम में दिया गया है। उदाहरण के लिए, यह देखिए कि क्या संख्याओं की मूलभूत संक्रियाओं के बीच कोई कड़ियां हैं। अधिकांश पाठ्यपुस्तकों में इन अवधारणाओं के प्रस्तुतीकरण में कोई परस्पर कड़ी नहीं होती। प्रस्तुतीकरण का विश्लेषण करके देखिए कि आपको इसमें अवधारणाओं की प्रस्तुति के बारे में बड़ों की समझ की और क्या बातें पता चलती हैं। यदि पाठ्यक्रम बाल–संवेदी होता तो इसमें कार्यों को बच्चों के लिए सार्थक बनाने पर ज़ोर होना चाहिए था। बच्चों को अवधारणा से परिचित कराने के लिए उसके जीवन से संबंधित सवाल लिए जाते। इसमें अवधारणा को ऐसे अन्य अवधारणाएं, प्रक्रियाएं या कौशल से जोड़ने की कोशिश होती जिनसे बच्ची परिचित हो चुकी है, चाहे गणित में, चाहे दूसरे क्षेत्रों में। एक उदाहरण देकर बताइए कि कैसे आप इस बात का ध्यान रखते हुए एक पाठ्यक्रम बनाएंगे।

E2 इसका एक लक्षण है, जानकारी याद रखने व उसे वापिस उगल देने पर अत्यधिक ज़ोर। इसका यह भी अर्थ है कि शिक्षक बताएं और छात्र ग्रहण करें। लोक शिक्षण शास्त्र के अन्य प्रमुख लक्षण क्या हैं?

E3 (i) शिक्षण के तरीके से पता चलता है कि उत्तर का अन्दाज़ा लगाए बगैर एल्गोरिद्म का उपयोग करवाया गया है। शिक्षक ने इस तथ्य पर ग़ौर नहीं किया है कि बच्ची ने भागफल के इतने छोटे होने का ध्यान नहीं दिया है। इससे यह भी पता चलता है कि शिक्षक ऐल्गोरिद्म के विभिन्न चरणों के अनुपालन पर कितना अधिक ज़ोर देते हैं। इस कक्षा में इस्तेमाल होने वाले शिक्षण के तरीक़े के बारे में आप और क्या कह सकते हैं?

(ii) मसलन, आप कह सकते हैं कि इसमें किसी परिवर्तन की ज़रूरत नहीं है क्योंकि सौरभ को शिक्षक की बात समझने की कोशिश करनी चाहिए। या आप कह सकते हैं कि बदलाव की ज़रूरत है क्योंकि शिक्षक ने गणना करने से पहले छात्र से उत्तर का अन्दाज़ा लगाने का नहीं कहा।

E4 ऐसा करते हुए, शिक्षक को शायद प्रत्येक बच्चे द्वारा विकसित अवधारणात्मक समझ की एक झलक मिल जाएगी। अन्य कारण क्या हो सकते हैं?

E5 पूरी प्रक्रिया में शिक्षक ने पूरी टोली तथा टोली के एक–एक बच्चे के कामकाज पर गहराई से ग़ौर किया। शायद आपको लगे कि एक या एकाधिक विकल्प सही हैं। यह लिखिए कि आपको ऐसा क्यों लगता है।

E6 उदाहरण के लिए, यदि आपको लगता है कि उसने लापरवाही से गलती कर दी है, तो आपको यह बताना चाहिए कि यह (i) या (ii) क्यों नहीं है। आपको इस बात का ठोस कारण भी देना होगा कि क्यों आपको लगता है कि यह सिर्फ एक लापरवाही की चूक है।

E7 हमने वास्तविक वस्तुों के साथ काम करने तथा उनका उपयोग अंकों व संख्याओं के साथ काम की शुरुआत के लिए करने की बात कही है। पूरे पाठ्यक्रम में हमने बात की है कि ठोस और अमूर्त के बीच की इस खाई को पार करने में बच्चों की मदद कैसे करें। इस खाई के बारे में आप जो समझते हों, वह लिखिए और यह बताइए कि गणित के तरीक़ों के संदर्भ में इसके क्या मायने हैं

E8 शिक्षक को एक बात यह पता चली कि सवाल को अलग–अलग ढंग से व्यक्त करने पर बच्ची का उत्तर अलग–अलग होता है। उसने यह भी देखा कि बच्ची कुछ स्थितियों में तो विधि का सही उपयोग कर लेती थी किन्तु कुछ अन्य स्थितियों में उसे दिक्कत होती थी। यह इस बात पर निर्भर होता था कि सवाल

को किस रूप में प्रस्तुत किया गया है। इस विवरण से शिक्षक और कौन सी विशिष्ट समझ तक पहुंच सकती है?

E9 उदाहरण के लिए, नीलम ने मौखिक रूप से जोड़ने का अभ्यास किया। उसने इस बात पर भी विचार किया कि दो अलग–अलग प्रक्रिया अपनाने पर उसे दो अलग–अलग उत्तर मिलते हैं। उसने और उसकी टोली के अन्य सदस्यों ने यह पहचाना कि एक संख्या को दूसरी के नीचे लिखकर जोड़ के सवाल करने में उन्हें कुछ कठिनाई आती है। उन्होंने शायद यह भी देखा होगा कि जब वे ऐल्गोरिद्म का उपयोग करते है और जब 'कुल मिलाकर' का उपयोग करते हैं, तो इनमें अन्तर होता है। सोचिए कि बच्चों ने इस प्रक्रिया में और क्या सीखा (मसलन, स्थानीय मान के बारे में)।

E10 ध्यान दीजिए शिक्षक नीलम से क्या करने को कह रही है। क्या वह उसे उत्तर बता रही है? क्या वह उससे सोचने की अपेक्षा कर रही हैं? क्या इस अन्तर्क्रिया में आपको कोई स्कैफोल्डिंग नज़र आता है? क्या शिक्षक ने अवधारणाओं को टुकड़े–टुकड़े में बाँटकर नीलम को अपनी समझ याद करने के लिए प्रदान की?

E11 टोली में चल रही अन्तर्क्रिया पर ध्यान दीजिए। बच्चे परस्पर वार्तालाप कर रहे हैं, एक–दूसरे की मदद कर रहे हैं। शिक्षक को हर क्षण यह पता नहीं कि हर टोली में क्या चल रहा है। फिर भी सब लगे हुए दिखते हैं। आपको यह स्थिति अच्छी लगती है, या नहीं? क्या बच्चों के जोड़ का अन्दाज़ा लगाने और संख्याओं का जोड़ करने में मदद देने के बेहतर तरीक़े हो सकते हैं? यदि हाँ, तो बताइए क्या किया जाना चाहिए।

बच्चे जब वस्तुों के समूह बनाने का अभ्यास कर चुके, उसके बाद, और संख्याओं को दहाई व इकाई स्थानों से सम्बद्ध करने से पहले और क्या किया जाना चाहिए?

E12 (क) ध्यान दीजिए कि कैसे राहुल सवाल के हल के बारे में अपनी राय बदल रहा है। क्या आपको लगता है कि उसने इस तथ्य की खोज कर ली है कि पहाड़ों का उपयोग करने और बारम्बार संख्या को जोड़ने से एक ही उत्तर मिलता है? आपको क्या लगता है, उसने और क्या सीखा होगा?

(ख) क्या आप उन्हें इबारती सवाल देंगे? क्या आप उन्हें समूह बनाकर गिनने के लिए वस्तुएँ देंगे? या आप कुछ और करेंगे? दो–तीन सम्भावनाएँ बताइए।

E13 ग़ौर कीजिए कि मधु ने इन कुछ पाठों में क्या किया। उसने यह समझने का प्रयास किया कि बच्चे संख्याओं से कैसे रिश्ता बनाते हैं। इसके बाद उसने उन्हें एक अत्यंत सरल कार्य दिया और एक–दूसरे से चर्चा करने व अपने विचारों को व्यक्त करने के भरपूर अवसर दिए। यदि आपको लगता है कि यह प्रक्रिया ठीक है, तो अपने कारण बताइए। यदि आपको लगता है कि मधु बहुत धीमे–धीमे चल रही है, तो बताइए कि आपको ऐसा क्यों लगता है। वह और क्या कर सकती थी जिससे बच्चों को भागीदार बनाने का उसका उद्देश्य पूरा हो जाता और बच्चे इस अन्तर्क्रिया की अपेक्षा कुछ अधिक सीख पाते?

E14 स्कैफोल्डिंग का अर्थ क्या होता है। उदाहरण में उन स्थानों की पहचान कीजिए जहां सिखाने के सिद्धांतों का उपयोग हुआ है। अपने विकल्प के पक्ष में ये उदाहरण प्रस्तुत कीजिए।

E15 इस उदाहरण में शिक्षक ने बच्चों को भिन्नों का जोड़ समझने में मदद देने के लिए ठोस वस्तुओं का उपयोग किया। परन्तु लगता है बच्चे, जो कुछ उन्होंने देखा उसका संबंध भिन्नों के सांकेतिक

प्रस्तुतीकरण से जोड़ने में असफल रहे। सोचिए कि ऐसा क्यों हुआ होगा। क्या इसलिए कि कक्षा 5 के बच्चे भिन्न नहीं समझ सकते? या, क्या यह जरूरी था कि बच्चों से भिन्नों को संकेत रूप में समझने की अपेक्षा करने से पहले शिक्षक को और धीमी गति से शुरू करना था और ठोस वस्तुओं के साथ कुछ और समय व्यतीत करना था। या, क्या आपको लगता है कि इसके कुछ अन्य कारण भी हो सकते हैं? जैसे बच्चों द्वारा ध्यान न दिया जाना, शिक्षक द्वारा ठीक से न बताया जाना, आदि। अपने उत्तर के कारण दीजिए।

E16 शिक्षक ने एक ऐसे साधन का उपयोग किया है जिसमें एक सवाल के कई संभावित उत्तरों की गुंजाइश है। उसने बच्चों को प्रोत्साहित किया कि वे सोचें और टोली में अपने विचारों का आदान–प्रदान करें। जिन बच्चों को कठिनाई हो रही थी उनको शिक्षक ने अवसर दिया कि वे अपनी समझ को अपने ढंग से व्यक्त करें। इसके अलावा उसने और क्या–क्या सोचा तथा इस उदाहरण से सीखने के और कौन–कौन से सिद्धांत उजागर होते हैं?

दो और ऐसी गतिविधियां सुझाइए जिनसे इन सीखने के सिद्धांतों और, शायद, अन्य सिद्धांतों का उपयोग हो। इसके लिए आप एकदम नई वस्तुओं का उपयोग कर सकते हैं और गतिविधियों का प्रारूप भी बिल्कुल अलग ले सकते हैं। ज़रूरी सिर्फ यह है सीखने के तत्त्व वही हों।

E17 कुछ कक्षाओं को देखकर अथवा कुछ शिक्षकों से पूछकर आप प्रक्रिया पता कर सकते हैं। अपने स्कूली अनुभव से भी आपको इसका कुछ अन्दाज़ा होगा। क्या इस उदाहरण में शिक्षक बच्चों को सोचने व विचार व्यक्त करने के ज़्यादा अवसर दे रही हैं?

E18 हमने रचनावादी कक्षा के कई उदाहरणों का विस्तृत विवरण दिया। इन कक्षाओं में आप क्या होते देखते हैं? क्या आप सोचते हैं कि बच्चे चुपचाप बैठकर शिक्षक को सुन रहे होंगे? क्या आपको लगता है कि बच्चे शिक्षक से डरे हुए होंगे? क्या वे जो कहना चाहते हैं, उसे कहने में झिझकेंगे? या वे एक–दूसरे से बात नहीं करेंगे? ये कुछ पहलू हैं जो किसी कक्षा की संस्कृति को परिभाषित करते हैं। कई अन्य पहलू हैं जो इन विवरणों में छिपे हुए हैं। एक रचनावादी कक्षा की संस्कृति को परिभाषित करने वाले अधिक से अधिक बिन्दु निकालने की कोशिश कीजिए। बच्चों और बड़ों की अन्तर्क्रियाओं के ऐसे उदाहरण दीजिए जिनमें ये बिन्दु उभरते हों।

E19 एक आम कक्षा में आकलन के उद्देश्य के बारे में सोचिए। उदाहरण के लिए, इनमें यह मूल्यांकन किया जाता है कि बच्ची को कितना याद है, वह दिए गए ऐल्गोरिद्म का उपयोग कितनी दक्षता से करती है, और अन्य छात्रों की तुलना में वह किस क्रम पर है। अन्य उद्देश्य भी हो सकते हैं।

एक रचनावादी कक्षा में आकलन के लिए दी गई गतिविधि का ज़ोर इस बात पर होता है कि बच्ची को आगे दिए जाने वाले कार्य की पहचान हो पाए, और उसके मौजूदा काम की तुलना उसके पहले किए गए काम से की जाए। रचनावादी कक्षा में आकलन के अन्य उद्देश्य भी लिखिए और आम कक्षा में आकलन के उद्देश्यों से उनकी तुलना कीजिए।

E20 जब बच्चे कार्य में व्यस्त हों, तब अपने अवलोकन रिकार्ड का कीजिए। विभिन्न बच्चों के सवाल को समझने के तरीकों व उसे समझ पाने के उनके स्तर के बारे में लिखिए। सोचिए कि इस गतिविधि ने आपको बच्चों के बारे में समझने में क्या मदद की। मसलन, यदि उनके क्रियाकलापों के रिकॉर्ड से आपको उनकी समस्याओं के आकलन में मदद मिली हो, तो वह लिखिए। यदि इसने आपकी शिक्षण रणनीति में कोई बदलाव किया हो, तो इसके बारे में लिखिए।

पाठ 12 : निरूपण

E10 सवाल सुलझाते हुए, अपने द्वारा उपयोग किए गए चरणों की तुलना डेविस व मेयर द्वारा दिए गए चरणों से करें। देखिए कि आपने जो कुछ किया क्या उसे पूरी तरह या कुछ हद तक भी से उनके द्वारा दिए गए चरणों से जोड़ा जा सकता है।

E11 उदाहरण के लिए, मान लीजिए सवाल यह है, 'लीला के पास 100 रुपए थे। उसने 9 रुपए प्रति किलोग्राम के भाव से 10 किलो गेहूं खरीदे। उसे अपने एक दोस्त के खेत से 3 किलो गेहूं भेंट के रूप में मिले और फिर उसने 5 किलो गेहूं 11 रुपए किलो के भाव से बेच दिए। अब उसके पास कितना पैसा है और कितना गेहूं है?'

पूरे सवाल या इसके विभिन्न हिस्सों के लिए कम से कम एक ठोस, चित्रात्मक या प्रतीकात्मक निरूपण लिखिए।

E12 यहां ज़ोर इस बात पर है कि बच्चों को विभिन्न निरूपणों के उपयोग में आत्मविश्वास विकसित करने में मदद की जाए। इस उद्देश्य को ध्यान में रखकर आप उन्हें सीखने के क्या अवसर देंगे?

E13 आपको सोचना है कि हमारे जीवन में भाषा का किस प्रकार का उपयोग है, हम जीवन में किस–किस तरह के गणित करते हैं तथा इनकी क्या उपयोगिता है। हमें यह भी सोचना होगा कि इन दोनों का उपयोग किस प्रकार होता है। आपको शायद यह तुलना भी करनी पड़े कि भाषा में अमूर्तता का स्तर (बोले गए शब्द, भाषा में तर्क, अक्षर, लिखित भाषा, वगैरह) और गणित में अमूर्तिकरण के प्रकार में क्या फर्क है।

यह भी सम्भव है कि आप इस कथन से असहमत हों और कहें कि गणित भी उतनी ही आसानी से अर्जित किया जाता है। फिर आपको समझाना पड़ेगा कि आप ऐसा क्यों कह रहे हैं।

E14 बच्ची अभी भी ठोस या दृश्य निरूपणों का इस्तेमाल कर रही है और इनसे आगे बढ़कर संख्याओं के जोड़ की अमूर्त क्रिया पर नहीं पहुँच पा रही है।

E15 उपरोक्त गतिविधि में बच्चों को सिर्फ कुछ ठोस सामग्री दी गई है जो उन्हें दिए गए सवाल को निरूपित करने के लिए पर्याप्त नहीं है। मकसद यह है कि उन्हें यह समझने में मदद मिले कि 4 थैलियों में 4 5 कंचे हैं। एक ऐसी गतिविधि बनाइए जिसमें बच्ची को यह पता करना हो कि 5 थैलियों, 6 थैलियों वगैरह में कितने कंचे होंगे। पहले उन्हें ठोस वस्तुों से निरूपण का उपयोग करने दें। फिर गतिविधि ऐसी होनी चाहिए कि बच्चे धीरे–धीरे अमूर्त की ओर जाएं। उन्हें एक पैटर्न उभरते देखने दीजिए। वे इसे कैसे निरूपित करेंगे? इस ज़रूरत में से बीजगणित के संकेत लाए जा सकते हैं– द थैलियों में कितना होगा?

E16 हम बच्ची को विभिन्न पद्धतियों से परिचित करा सकते हैं– जैसे रोमन, देवनागरी, आदि। इसके बाद हम प्रत्येक पद्धति को इस्तेमाल करने के पक्ष–विपक्ष की चर्चा कर सकते हैं। अभ्यास के उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए आप और क्या करना चाहेंगे?

E17 AMT-01 और इस पाठ्यक्रम, दोनों में आपने बच्चों द्वारा गणित करने के कई उदाहरण देखे हैं। आपने ऐसे बच्चों के कई उदाहरण भी देखे हैं जो अवधारणा को तो समझते हैं किन्तु सारे संबंधित सवाल सही–सही नहीं कर पाते। इसके क्या कारण हो सकते हैं?

हो सकता है आप यह भी सोचें कि यदि बच्ची संबंधित अवधारणा को समझती है तो वह सारे सवाल सही कर लेगी और यदि वह सारे सवाल सही करती है तो वह अवश्य उस अवधारणा को समझ चुकी होगी। अपने मत के पक्ष में कारण व उदाहरण दीजिए। मसलन आप कह सकते हैं कि यदि उसने वह अवधारणा समझ ली है तो वह उससे संबंधित ऐल्गोरिद्‌म विकसित कर लेगी; और इस तरह से सबसे ज़रूरी है अवधारणा की समझ विकसित करना।

E18 आपको किसी ऐसी बच्ची के साथ काम करना है जो गणित का कोई सवाल हल कर रही हो। देखिए कि वह क्या करती है। उससे कहिए कि वह अपने हर कदम का कारण बताती जाए। इस प्रक्रिया में आपको लगेगा कि उसे कुछ ऐसे प्रश्न पूछने की ज़रूरत है जो उसे एक तार्किक ढांचा विकसित करने में मदद करे, उसे अपनी तर्क क्षमता को पैना बनाने को विवश करे और अपने कारणों को स्पष्ट रूप से व्यक्त करने में उसे मदद करे। इस अन्तर्क्रिया को रिकॉर्ड कीजिए और इसमें उपस्थित शिक्षण सिद्धांतों के बारे में सोचिए।

इकाई – 5
आँकड़ों का निष्कर्ष और संभावना

पाठ – 13 आँकड़ों से निष्कर्ष निकालना कैसे सिखाएँ

आंकड़ो से निष्कर्ष निकालना

पाठ – 14 संभावना के बारे में सीखना

संभावना के बारे में बच्चों की धारणाएँ – क्यों सिखाएँ बच्चों को संभावना की बातें?

पाठ – 13

आंकड़ों से निष्कर्ष निकालना कैसे सिखाएं

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- आंकड़ों से निष्कर्ष निकालना
- आंकड़ों को निरूपित करने वाले मान
- सारांश

पिछले पाठ में हमने पढ़ा कि किस तरह आंकड़े उत्पन्न, रिकॉर्ड और प्रस्तुत कर सकते हैं। आंकड़ों के सरल विश्लेषण के कुछ उदाहरण भी दिए गए थे। इस पाठ में बच्चे आंकड़ों से कुछ निष्कर्ष कैसे निकाल सकते हैं तथा इस बात की जांच भी कर सकते है कि उनके निष्कर्ष सही हैं या नहीं।

हम इस बात के उदाहरण प्रस्तुत करेंगें कि प्राथमिक स्कूल के बच्चे आंकड़ो से देखने वाले रूझानों को मात्रात्मक रूप में देख पाते हैं। विशेष रूप से हम बच्चो को माध्य व बहुलक से परिचित कराने के संबंध में चर्चा करेंगे। यह परिचय अत्यंत सरल स्तर का होगा। हम बच्चों को आंकड़े इस्तेमाल करने के जिन विभिन्न पहलुओं से परिचित कराने की बात कर रहे हैं, उससे आप सहमत या असहमत हो सकते है।

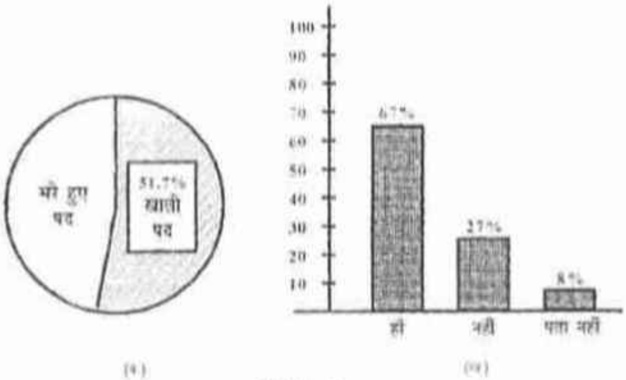
उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- बच्चों में क्षमताएँ विकसित करने के लिए गतिविधियां बनाकर आज़मा पाएँगे।
- आंकड़ों का विश्लेषण कर पाएँगे।
- आंकड़ों से निष्कर्ष निकालना, खासकर उनके रुझानों को मात्रात्मक रूप में देख पाएँगे।
- आंकड़ों का उपयोग करके परिकल्पनाएँ बनाना और उनकी जाँच कर पाएँगे।

आंकड़ो से निष्कर्ष निकालना

हमने देखा कि आंकडे सिर्फ संख्याएं नही होती किन्तु जब हम किन्ही आंकड़ों को देखते है तो हम उनसे संबंधित संख्याओं (जैसे राशियों) से कुछ अर्थ निकालते हैं। समस्त आंकडों का एक प्राकृतिक संदर्भ व अर्थ होता है। लिहाजा हम आंकड़ों को उसी संदर्भ में देखते है तथा इनके आधार पर कोई सार्थक बात कहने की कोशिश करते है। जैसे– चित्र 1 (क) में पाई चार्ट व (ख) में स्तंभ आरेख के रूप में प्रस्तुत आंकड़े।



।चत्र 1

चित्र 1 (क) उडीसा मे प्राथमिक स्कूल शिक्षकों की संख्या के आंकड़ों का प्रस्तुतिकरण है। (संदर्भ दी हिन्दू 10/10/2000)। जैसे कि आप देख सकते हैं, आवश्यक पदों मे से अधिकांश खाली हैं। (ख) में इन्टरनेट पर किए गए एक सर्वेक्षण से प्राप्त आंकडे प्रस्तुत किए गए हैं। सवाल यह पूछा गया था कि 'क्या यूनिट ट्रस्ट को अपनी राजलक्ष्मी योजना बन्द कर देनी चाहिए?' मत देने वालों में से सिर्फ 27 प्रतिशत का विचार था कि इसे जारी रखना चाहिए। (संदर्भ टाइम्स ऑफ इण्डिया 7/10/2000)।

चित्र 1 मे दर्शाये गए आंकड़ो से क्या हम किसी और निष्कर्ष पर भी पहुच सकते है?

जैसे– क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि उड़ीसा के अधिकांश बच्चो को शिक्षक उपलब्ध नही हैं? या अधिकांश लोग मानते हैं कि लड़कियों के लिए चलाई जा रही यूनिट ट्रस्ट योजना बेकार है?

पिछले पाठ के उदाहरणो में देखे कि उनमें प्रस्तुत आंकड़ो से कैसे कथन उभरते हैं।

उदाहरण – आंकड़ों से निकला कथन

1. जून में एक सप्ताह बहुत गर्म रहा–पिछले 50 वर्षो में इतना उच्च तापमान कभी नही रहा।
2. क्रिकेट पसंद करने वाले बच्चे दुनिया भर के क्रिकेट के अच्छे खिलाड़ियो के बारे में जानते है।
3. क) उपस्थिति ज्यादातर 25–30 के बीच रहती है।

   ख) उपस्थिति में बहुत उतार–चढ़ाव होते है।
4. ज्यादा बच्चे अमरूद की अपेक्षा केले पसंद करते है।

इन उदाहरणो से देख सकते है कि आंकड़े पर ज्यादा काम किए बगैर भी हम इनके विशिष्ट निष्कर्ष निकालते हैं, जैसा 'इस जून में पिछले पचास वर्षो का सबसे गर्म दिन था' एक अत्यंत विशिष्ट कथन है। अन्य कथन जैसे 'उपस्थिति में बहुत उतार–चढ़ाव होता है' ज्यादा व्यापक होते है।

इनमें से कुछ कथन, अन्य की अपेक्षा ज्यादा उपयोगी है। सबसे उपयोगी कथन वे होते है जिनसे हम आंकड़े से संबधित घटनाओं के बारे में कुछ पूर्वानुमान लगा सके। जैसे– बच्चे अमरूद की अपेक्षा केले ज्यादा पसंद करते है, के आधार पर शायद कुछ लोग यह कहना चाहें कि उसी स्कूल की किसी अन्य कक्षा के बच्चे भी अमरूद की अपेक्षा केले ही ज्यादा पसन्द करेंगे। जाहिर है कि यह अनुमान सही भी हो सकता है और नही भी इसकी जांच कैसे करे?

E1) पाठ 13 के उदाहरण फिर से पढ़िए और ऊपर प्रस्तुत निष्कर्षो पर गौर कीजिए।

क) इनमें से कौन से निष्कर्ष उपयोगी है और क्यों?

ख) इन उदाहरणो में आंकड़ो के आधार पर क्या–क्या सार्थक कथन दिए जा सकते है?

ग) क्या आप ऊपर दिए गए चार निष्कर्षो में से किसी से असहमत है? क्यों?

हमने देखा कि किन्ही भी आंकड़ो के आधार पर हम सार्थक कथन बना सकते है। प्रायः आंकड़ो के एक समुच्चय के आधार पर कई अलग–अलग कथन दिए जा सकते है। साथ ही साथ, आंकड़ो से कुछ सवाल भी उभरते है। जैसे उदाहरण 1 में "अन्तिम दिन तापमान सबसे कम था। क्या इसका मतलब यह हुआ कि गर्मी की लहर समाप्त हो गई थी?" इसी प्रकार उदाहरण 3 में "क्या सप्ताह के कुछ निश्चित दिनो पर उपस्थिति आम तौर पर अधिक होती हैं?" ध्यान दें कि फिलहाल हमारे पास जो आंकड़े है उनसे इन सवालो का जवाब नही दिया जा सकता है। हम सिर्फ अटकले लगा सकते हैं। इन सवालो का जवाब देने के लिए हमें लम्बी अवधि के आंकड़े एकत्र करने होंगे।

कुछ सवाल ऐसे भी होंगे जिनके जवाब आंकड़े एकत्र करने की अवधि को बढ़ाकर भी नही दिए जा सकेंगे। जैसे– चित्र 1 (क) में यह पूछ सकते है: "क्या खाली पदो को भरने के लिए प्रशिक्षित शिक्षक उपलब्ध नही हैं?"

एक उदाहरण जो बच्चो को आंकड़ो से निष्कर्ष निकालने को प्रेरित कर रहा है।

उदाहरण 1 : कक्षा 4 के बच्चो को लम्बाई नापने के तरीके बताए जा रहे थे शिक्षक हेमा ने कक्षा को 5 या 6 की टोलियो मे बॉट दिया और प्रत्येक टोली के सदस्यो से एक–दूसरे का कद नापने को कहा। कद नापने के लिए वे अपने मनपसन्द का कोई भी तरीका अपना सकते थे। हेमा ने उनसे यह भी कहा कि वे जैसे चाहे, कदो का रिकार्ड रख राकते है। उराने देखा कि कद नापने के लिए कुछ टोलियो ने बित्ते का, कुछ ने दीवार पर लगे निशानो का, तो कुछ टोलियो ने फुट्टे का इस्तेमाल किया था।

अब हेमा ने इस बात पर चर्चा छेड़ी कि मापन के इन अलग–अलग तरीको की तुलना कैसे की जाए और सारी उंचाइयो को एक बार में देखने का सबसे बेहतर तरीका क्या होगा।

कुछ देर में बच्चे इस निष्कर्ष पर पहुचे कि दीवार पर ऊंचाइयो के निशान लगाना सबसे अच्छा रहेगा। एक बच्ची ने इसका कारण बताते हुए कहा, "तब हम देख पाएगें कि आशु उस टोली में सबसे लम्बा है।"

अतः हेमा ने दीवार पर एक बड़ा कागज चिपका दिया और सब बच्चो से कहा कि वे उस पर अपने कद का निशान लगाकर नाम लिख दे। फिर वे टोलियों में यह चर्चा करें कि ऊंचाइयों के निशानो से वे क्या निष्कर्ष निकाल सकते है। जैसे –

- सबसे लंबे व सबसे छोटे बच्चे कौन है?
- क्या कुछ ऊचाइयों के आसपास ज्यादा निशान है?

इस बातचीत के बाद एक बार फिर से ऊंचाइयों नापी गई, इस दफा फुट्टे से प्राप्त आंकड़ो को बोर्ड पर लिख दिया गया और निम्नलिखित प्रश्न पूछे गए :

- कक्षा में अधिकांश बच्चो की लंबाई लगभग कितनी है?
- कितने बच्चे इस सामान्य ऊंचाई से अधिक लम्बे है?

बच्चे अपनी चर्चाओ में रूचि लेने लगे। वे कई सार्थक व कई मजाकिया निष्कर्ष भी निकाल रहे थे। जब कोई मजाकिया निष्कर्ष निकालता तो हंसी के फव्वारे छूट जाते। जैसे– एक बच्ची ने निष्कर्ष दिया कि तरूण और आभा सबसे ऊंचे है और अगले नाटक में वे 'जिराफ' की भूमिका निभा सकते हैं।

E2) अपने मोहल्ले में बच्चों के साथ इसके लिए आंकड़े इकटठे करने का अभ्यास कीजिए कि वे बड़े होकर क्या बनना चाहेंगे। वे इन आंकड़ो से क्या निष्कर्ष निकल पाए? यदि आप और बच्चे इसी प्रकार के आंकड़े एकत्र करें, तो क्या तब भी सही निष्कर्ष निकलेंगे? क्यों?

आंकडो का उपयोग करने का हमारा मकसद न सिर्फ संख्याओ में सामान्य रूझान देखना है बल्कि अनुमान लगा पाना भी है। "अन्य दिनो की अपेक्षा सोमवार को उपस्थिति ज्यादा रहती है।" यह परिकल्पना (hypothisis) का एक उदाहरण है। परिकल्पना एक ऐसा कथन है जो सही या गलत निकल सकता है। इसकी जांच आंकड़ो की कसौटी पर करनी होगी। जैसे– हम पाठ 13, उदाहरण 3 के आंकड़ों को 12 सप्ताह तक इकट्ठा करे और लगातार देखे कि उपस्थिति सोमवार को अधिक होती है। इससे हमारी परिकल्पना को कुछ मामलों में सत्यापिक करने का मौका मिलेगा। इसके विपरीत, यदि हमें ऐसा कोई लक्षण नही दिखता, तो हमें इस परिकल्पना को खारिज कर देना होगा।

आंकड़ों से संम्बंधित यह पक्ष समझने में बच्चो की मदद कैसे करे? आइए एक उदाहरण देखे।

उदाहरण 2 भगत ने कक्षा 3 के पर्यावरण अध्ययन के पाठ के दौरान बच्चो से पूछा, "हमारे घरो में सबसे ज्यादा कौन सी वस्तु खाई जाती है?" कई बच्चो ने चावल, दाल, चपाती, आलू, वगैरह के नाम गिनाए। तब भगत ने पूछा, "यदि मैं कहू कि हमारे इलाके में ज्यादा लोग चपाती के बजाय चावल खाते है, तो यह क्या सही होगा?" थोड़ी देर चुप्पी रही और फिर अचानक 'हां' और 'नही' का मिलाजुला शोर होने लगा। भगत ने उनसे कहा कि वे अन्दाजा लगाने की बजाय यह सोंचे कि कैसे जांच करेंगे कि परिकल्पना सही है या नही। अन्ततः उसकी थोड़ी मदद से बच्चो ने निष्कर्ष निकाला कि वे इस परिकल्पना के बारे में अगले दो दिन अपने व पड़ोसियो के घर से आंकड़े इकट्ठे करेंगे।

अगली कक्षा में सारे आंकड़े इकट्ठे किए गए। बच्चो ने पाया कि जिन 75 परिवारो में से आंकड़े प्राप्त किए गए थे उनमें से कुछ लोग दिन में दो बार, कुछ दिन में एक बार, कुछ तीन दिन में एक बार चावल खाते है, आदि। फिर इस बात की चर्चा की कि मूल परिकल्पना की जांच के लिए इन आंकड़ो का वर्गीकरण कैसे किया जाए।अन्ततः उन्होंने एक तालिका का उपयोग किया जो निम्नानुसार थीः

रोजाना चावल खाने वाले लोग	45
रोजाना चपाती खाने वाले लोग	50
कभी–कभार ही चावल खाने वाले लोग	20
कभी–कभार ही चपाती खाने वाले लोग	10

अब भगत ने पूछा कि उसका दावा सही है या नही। एक बच्ची आरती ने कहा, "मगर यदि कुल 75 ही परिवार है, तो फिर ऐसा कैसे हो सकता है कि 45 लोग चावल खाते है और 50 लोग चपाती खाते है?" जवाब सौरभ ने दिया "क्यों"? हम दोनों वस्तु खाते है हम दोनों में गिने जाएगें। सर, ज्यादा लोग चावल खाते हैं। "बच्चे आमतौर पर सहमत थे कि इकट्ठे किए गए आंकड़ो से पता चलता है कि ज्यादा लोग चावल खाते है। तभी एक बच्चा चिल्ला उठा, "परन्तु इससे हम यह नही कह सकते कि परिवार के सारे लोग चावल ज्यादा खाते है या चपाती।"

भगत ने तय किया कि गृहकार्य में इस चर्चा से उठी सोच को आगे बढ़ाएगा। उसने कहा कि अगली कक्षा में वे तीन ऐसे कथन बनाकर लाएं जिनकी जांच इन आंकड़ो से नही हो सकती और तीन ऐसे कथन बनाएं जिनकी जांच हो सकती है।

इस उदाहरण में हमने देखा कि हम कैसे ऐसी परिकल्पना से शुरू कर सकते है जिसकी जांच की जानी है। इसके बाद हमें तय करना होगा कि इसकी जांच के लिए किस तरह के आंकड़े इकट्ठे किए जाए।

E3) परिकल्पना – "कक्षा 6 की लड़किया कक्षा 6 के लड़को से ज्यादा लम्बी होती है।"

इस परिकल्पना की जांच के लिए आपको किस प्रकार के आंकड़े एकत्र करने होंगे? कक्षा 3 या 4 के बच्चो के लिए एक गतिविधि बनाइए जिसमें वे ये आंकड़े इकट्ठे करे और परिकल्पना की जांच करें।

अब तक हमने देखा कि आंकड़ो के उपयोग से हम निष्कर्ष कैसे निकाल सकते हैं ऐसे कुछ साधन उपलब्ध है जिनकी मदद से हम आंकड़ो द्वारा प्रदर्शित मात्रात्मक रूझान देख सकते है आइए अब देखते है कि ऐसे कुछ साधनो का उपयोग करने में बच्चो की मदद कैसे करें।

आंकड़ो को निरूपित करने वाले मान

जैसे– मेरे पास पिछले 5 वर्षो में राज्य भर के 100 कॉलेज से D.Ed. कार्यक्रम में पंजीयन करवाने वाले छात्रो के बहुत सारे आंकड़े है इन आंकड़ों के आधार पर मैं जानना चाहती हूं कि कितनी सामाग्री छापी जाए या कितने कांउसलर नियुक्त किए जाए, आदि। क्या मैं इन आंकड़ों को इस तरह व्यवस्थित कर सकती हूं कि कारगर ढंग से जरूरी जानकारी प्राप्त कर सकूं? या क्या मैं इन आंकड़ों का कोई ऐसा उपसमूह खोज सकती हूं जो मेरे सवालो का जवाब देने में मददगार हो?

अक्सर हम दिए गए आंकड़ो से कोई ऐसा मान प्राप्त कर सकते है जो एक अर्थ में पूरे आंकड़ों को निरूपित करता है। उपयुक्त ढंग से चुने गए ऐसे मानो की मदद से कुछ प्रश्नो का ठीक–ठाक उत्तर दिया जा सकता है। इस भाग में हम ऐसे दो मानो बहुलक तथा माध्यमान (औसत) पर बात करेंगे, जो कुछ किस्म के आंकड़े को निरूपित कर सकते है।

बहुलक

जैसे– किसी छोटे शहर के लोग एक खास टीवी चैनल, टी.वी.सी. को कितने घंटे देखते है, के आंकड़े है। यदि आप यह जानना चाहे कि टी.वी.सी. के कार्यक्रम कितने लोकप्रिय है, तो आप इन आंकड़ो को कैसे व्यवस्थित करेंगे? एक तरीका यह हो सकता है कि उन परिवारो को एक समूह मे रखा जाए जो टी.वी.सी. को एक घंटे से कम समय के लिए देखते है, फिर उन परिवारो का समूह बनाया जाए जो टी.वी.सी. को 1 से 3 घण्टे के लिए देखते है। इसके लिए तालिका–

घण्टे प्रतिदिन	टी.वी.सी. देखने वाले परिवारो की संख्या
बिलकुल नही देखते	2000
1 घण्टे तक देखते है	1000
1 से 3 घण्टे तक देखते हैं	4000
3 से 5 घण्टे तक देखते है	500
5 घण्टे से ज्यादा देखते है	50

इन आंकड़ों से हम पाते है कि लगभग आधी आबादी (4000 परिवार) 1–3 घण्टे टी.वी.सी. देखते हैं। तो लोकप्रियता सम्बंधी हमारे प्रश्न के मकसद से यह मान आंकड़ो को निरूपित कर सकता है। 1–3 घण्टे टी.वी.सी. देखना वह घटना है जो सबसे ज्यादा बार घटती है अर्थात् इस मान की बारंबारता सबसे ज्यादा है। अतः यह आंकड़ो का बहुलक (mode) है।

उदाहरण 3 : अजरा ने कक्षा 5 के बच्चों को गणित का एक टेस्ट दिया था। टेस्ट में चौबीस बच्चे उपस्थित थे। पूर्णांक 10 में से निम्नानुसार अंक मिले थे :

6, 3, 4, 2, 5, 6, 9, 7, 7 ,4, 6, 5, 8, 5, 3, 5, 6, 8, 4 , 5, 5, 7, 3, 4

उसने तय किया कि इस मौके का उपयोग करते हुए बच्चों से आंकड़ो का अध्ययन करवा कर निष्कर्ष निकालने को कहा जाए। अतः उसने सारे प्राप्तांको को एक पंक्ति में लिख दिया, जैसा कि ऊपर दर्शाया गया है। अब अजरा नें बच्चों से पूछा कि क्या वें आंकड़ो को देखकर अपने काम के बारे में कुछ कह सकते हैं। थोड़ी देर की चुप्पी के बाद एक बच्ची कह उठी, "किसी को शून्य नही मिला हैं।"

अजरा : बढ़िया! और क्या कह सकते हो? क्या तुम बता सकते हो कि कितने बच्चो को सबसे कम अंक मिले है?

रणधीर : मैडम 2 सबसे कम है जो कि एक बच्चे को मिला है।

अजरा : शाबास! अब मान लो मै अंको का बंटन दो कॉलम में लिख देती हूँ। एक कालम में मै अंक लिखूंगी और दूसरे कॉलम में प्रत्येक अंक के सामने यह लिखूंगी कि उतने अंक कितने बच्चो को मिले (तालिका में) उदाहरण के लिए सिर्फ एक बच्चे को 2 अंक मिले है। तो मैं 2 के सामने दाएँ कॉलम में 1 लिख दूंगी। चूंकि 0 किसी को नही मिला है, इसलिए शून्य के सामने लिखूंगी शून्य। क्या अब तुम अंको के बारे में कुछ कह सकते हो? उदाहरण के लिए, क्या हम कह सकते है कि गणित में कक्षा की हालत बहुत खराब नही है?

प्राप्तांक	बारम्बारता
0	0
1	0
2	1
3	3
4	4
5	6
6	7
7	3
8	2
9	1
1	0

कई बच्चो नें हँसते हुए हामी भरी और एक बच्ची बोल उठी।

माया : हॉं मैडम! अधिकतर बच्चो के 5 अंक है। यही ज्यादा बार आया है।

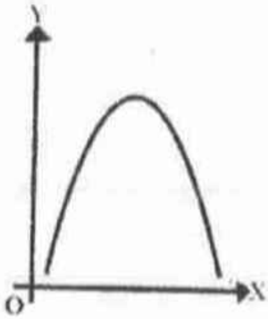
अजरा : हॉं। वास्तव में इस 'ज्यादा बार ' को हम बहुलक कहते है। यह भी देखो कि तुममें से बहुत के कम अंक आए है। बहुत ज्यादा भी किसी के नही है। यह बिलकुल सामान्य बात है।

रणधीर : हम में से अधिकतर के 4 और 7 के बीच अंक आए है। अगली बार हम और अच्छा करेंगे।

अजरा : शाबाश!

गृहकार्य के रूप में अजरा ने बच्चो से यह पता करने को कहा कि उनके परिवार के सदस्यों और मित्रो को कौन सी फिल्मे पसन्द है। अगले दिन बच्चो को यह जानकारी लाकर एक बारंबारता तालिका बनानी थी जिसमें फिल्म का नाम और उसे पसन्द करने वाले लोगो की संख्या लिखी जाएगी। इस तालिका के आधार पर उन्हें यह पता लगाना था कि अधिकतम लोगो की पसन्दीदा फिल्म कौन सी है, अर्थात् उन्हें इन आंकड़ो का बहुलक निकालना था। दो दिन बाद उन्होंने कक्षा में सारे आंकड़े जमा किए। अब उन्हे पता लगा कि दो फिल्में सबसे ज्यादा लोकप्रिय थी और दोनो को 35–35 वोट मिले थे।

अजरा ने बच्चो से पूछा कि बहुलक क्या होगा। उसे जल्दी ही समझ आ गया कि बच्चो का आग्रह था कि इनमें से कोई एक ही बहुलक हो सकता है। वे तर्क दे रहे थे कि अमुक फिल्म में फलां हीरो था या अमुक फिल्म में गाने बहुत अच्छे थे, वगैरह और इसलिए फलां फिल्म ज्यादा लोकप्रिय होनी चाहिए। तभी एक बच्चे ने पूछा कि क्या दोनों मान बहुलक नही हो सकते। वह बहुत खुश थी कि बच्चे इतनी सहजता से बहुलक की अवधारणा को पकड़ पा रहे है।



चित्र 2 : प्रसामान्य रूप से बंटित आंकड़ों का ग्राफ

उदाहरण 3 की बारंबारता तालिका की एक विशेषता यह है कि उसमें बहुत थोड़े बच्चो के बहुत कम या बहुत अधिक अंक है। अधिकांश बच्चे बीच में है। जैसा कि अजरा ने बताया था, किसी भी टेस्ट के प्राप्तांको में ऐसा होना एक 'सामान्य' बात है। दरअसल आंकड़ो की इसी विशेषता की वजह से बहुलक का समस्त आंकड़ो के मानो को निरूपित करना उपयुक्त माना जाता है। और बहुलक पता करने के लिए कोई गणना भी नही करनी होती। यदि हम ऐसे आंकड़ो का ग्राफ बनाएं, तो देंखगे कि वह घण्टी आकार का बनता है (चित्र 2)। तो हम कहते है कि उनका बंटन प्रसामान्य (distribution is normal) है।

किसी भी प्रसामान्य रूप से बंटित आंकड़ो का एक ही बहुलक होता है। अतः जब हमें दो बहुलक वाले आंकडे मिले, जैसे कि 'लोकप्रिय फिल्म' के आंकड़े थे, तो उनका बंटन प्रसामान्य नही हो सकता।

E4) अपने आसपास के कुछ बच्चो को आंकड़े एकत्र करने की गतिविधि दीजिए। इन आंकड़ों का बंटन ऐसा हो कि अधिकांश आंकड़े बीच में हों और बहुत अधिक या बहुत कम मान थोड़े से आंकड़ों के ही हों। बच्चो से चर्चा करके यह पता लगाइए कि जिस समस्या से संबंधित आंकड़े उन्होंने एकत्र किए, उसके बारे में उनकी मात्रात्मक समझ क्या है। आपने यह समझने में उनकी मदद कैसे की कि बहुलक को आंकड़ो का प्रतिनिधि माना जा सकता है?

E5) दो ऐसे उदाहरण दीजिए–एक में बहुलक आंकड़ो को निरूपित करता हो और एक में नही।

इसका मुख्य कारण यह था कि आंकड़ो के अलग–अलग मानो (प्राप्तांको) की संख्या बहुत कम थी। किन्तु ऐसा हमेशा नही होता, अगले उदाहरण से पता चलता है कि कक्षा मे काम करते–करते बच्चे ऐसे आंकड़े निकाल सकते है जिनके मानो का फैलाव बहुत ज्यादा हो तो बारम्बारता तालिका बना सकते हैं।

उदाहरण 4 : मेरे पड़ोस के स्कूल के कक्षा 3 के बच्चे फीते से एक–दूसरे का कद नाप रहे थे। चूंकि ये बच्चे बहुत छोटे–छोटे थे इसलिए उनके शिक्षक चन्दन ने निर्देश दिया था कि वे सिर्फ से.मी. के निशानों का उपयोग करें। जो नाप आए उन्हें निम्नानुसार बोर्ड पर लिख दिया गया :

108, 110, 122, 108, 106, 103, 113, 108, 103, 106, 117, 98, 112,

116, 103, 107, 116, 110, 112, 111, 104, 102, 119, 109, 114,

बच्चो को टोलियों में बांटकर उनसे इन आंकड़ो की बारंबारता तालिका बनाने को कहा गया। सभी टोलियो को यह काम बहुत मुश्किल लगा। तब चन्दन ने बच्चो से पूछा कि क्या वे यह बता सकते है कि कक्षा का औसत कद कितना होगा। थोड़ी देर बाद एक बच्ची ने कहा "108 से.मी.।" जब उससे पूछा गया कि क्यों, तो उसने कहा, "यह बोर्ड पर सबसे अधिक बार लिखा हुआ है।"

एक अन्य टोली में बच्चे एक–दूसरे से पूछ रहे थे कि औसत क्या होता है। अंततः उन्होनें शिक्षक से पूछा। शिक्षक ने कहा, "इसका मतलब यह होता है कि मान लो तुमने कक्षा में अपने दोस्त का कद नहीं नापा है, लेकिन इकट्ठे किए गए आंकड़ो के आधार पर उसके कद का अन्दाजा लगाना चाहते हो। तो तुम क्या कहोगे कि उसका कद कितना है– लगभग कितने से.मी. है?" एक बच्ची ने जवाब दिया, "123 से कम।" इस पर चन्दन ने कहा, "हाँ, यह तो है कि कद 97 से.मी. से अधिक और 123 से.मी. से कम है। मगर क्या तुम इससे बेहतर भी अन्दाजा लगा सकते हो? मान लो हम इन्हीं आंकड़ो को थोड़ा अलग ढंग से रखे। मान लो कि तुम इनके समूह बना लो– प्रत्येक समूह में 5–5 सेमी. रहे। तब आंकड़े कैसे दिखेंगे?"

टोलियों में थोड़ी चर्चा के बाद एक बच्ची ने कहा,"98 से.मी. सबसे कम है, इसलिए पहला समूह 98–102 से.मी. का हो सकता है।" चन्दन ने कहा, "सही है, और उसके बाद?" थोड़ी देर में बच्चो ने तय किया कि आंकड़ो को 98–102 से.मी., 103–107 से.मी., 108–112 से.मी. 113–117 से.मी और 118–122 से.मी. समूहो में बांटा जाए।

अगला कदम यह था कि बच्चे इन समूहो के आधार पर बारंबारता तालिका बना पाएं। यह काम तो बच्चे कर पाए। शिक्षक ने बच्चों से पूछ–पूछ कर बोर्ड पर लिखा :

समूह	बारंबारता
98–102	2
103–107	7
108–112	9
113–117	5
118–122	2

फिर चन्दन ने पूछा, "अब बताओ, कौन सा समूह सबसे ज्यादा बार आता है?" थोड़े और सुझावों व चर्चा की मदद से चन्दन बच्चो को बहुलकी (modal) समूह की अवधारणा तक ले जाने में तथा यह समझाने में सफल रहा कि यह एक 'सामान्य' सहपाठी के कद को निरूपित करता है।

जब भी आंकड़ो के मान का फैलाव बहुत ज्यादा हो तो उन्हें बराबर माप के अन्तरालो में बांटना मददगार होता है। इन अन्तरालो को वर्ग (class) भी कहते है। इनके आधार पर बारंबारता तालिका बनाई जा सकती है।

E6) शुरूआत में बच्चो को बारंबारता तालिका बनाने में दिक्कत क्यों हुई?

E7) उदाहरण 4 के आंकड़ो का स्तम्भ आरेख बनाने का प्रयास कीजिए। इसके बाद वर्गीकृत आंकड़ो का स्तम्भ आरेख बनाइए। क्या इन दो स्तम्भ आरेखो की आकृतियों में कोई समानता है? क्या कोई बड़ा अन्तर भी है? यदि आप इन आंकड़ो को बराबर अन्तरालों में न बांटकर दूसरी तरह से वर्गीकरण करे, तो स्तम्भ आरेख की आकृति में क्या अन्तर पड़ेगा?

इस प्रकार हम बच्चों को आंकड़ो के बहुलक की अवधारणा से सहजता से परिचित करा सकते हैं। अब देखते हैं कि कुछ तरह के आंकड़ो को निरूपित करने वाले एक अन्य मान का उपयोग बच्चे किस तरह कर सकते हैं।

औसत

इसकी शुरूआत कक्षा 6 के दो बच्चों मणि और डॉली की बातचीत से करते है।

मणि : पता नही औसत क्यों निकालते है। इसके लिए इतना काम करना पड़ता है। पहले सारी संख्याओं को जोड़ो और फिर उसमें भाग दो।

डॉली : देखो, अगर हम औसत निकाल ले, तो हमें सारे आंकड़ो को फिर से नही देखना पड़ता।

मणि : क्यों?

डॉली : क्योंकि इससे हमें मोटा अन्दाज लग जाता है।

मणि : मैडम ने हमें यह तालिका दी है– भारत की आंबादी अलग–अलग ....

डॉली : जनगणनाओं में?

मणि : हाँ। यह बढ़ती जाती है। तो औसत निकालने से हमें मोटा अन्दाजा कैसे मिलेगा?

डॉली : हूँ ...। नही, मुझे लगता है नही मिलेगा। क्या मैडम ने तुम्हें औसत निकालने को कहा था?

मणि : कहा तो नही। लेकिन हमने अपनी कक्षा के परीक्षा प्राप्तांको का औसत निकाला था। बहुत बोरियत हुई थी। औसत तो 61.6 था, मगर मुझे तो 53 ही मिले थे।

डॉली : यानी तुम्हारी कक्षा के अधिकांश छात्रो के अंक तुमसे ज्यादा थे। किसी को 80 से ज्यादा भी मिले थे क्या?

मणि : नही .... हाँ, मोहन को मिले थे। वह तो वैसे भी हमेशा टॉप करता है। चलो, मै फेल तो नही हुआ।

डॉली : क्या बहुत से बच्चे फेल हुए थे?

मणि : नही सिर्फ रवि फेल हुआ। मेरे ख्याल में ज्यादातर बच्चो को 55 और 65 के बीच अंक मिले थे।

डॉली : तो देखो, ज्यादातर बच्चों को औसत के ही आसपास अंक मिले, नहीं?

मणि : हाँ इस बार ऐसा ही हुआ। पर तुम्हें कैसे पता कि हर बार ऐसा ही होगा?

डॉली : मुझे नही मालूम। मगर मुझे लगता है .... ज्यादातर ज्यादा लोगो को औसत के आसपास ही अंक मिलते हैं। इसीलिए तो हम औसत निकालते है।

इस बातचीत से पता चलता है कि डॉली को लगता है कि औसत एक ऐसा मान है जो किसी प्रकार के आंकड़ो को निरूपित करता है। क्या आप उसके विचार से सहमत है? वास्तव में, कुछ मामलों में जहाँ आंकड़ो का बंटन प्रसामान्य होता है (अर्थात् आंकड़ो में एक या ज्यादा केंद्रीय मानो के नजदीक रहने की प्रवृत्ति होती है) वहाँ ऐसा देखा जाता है। बहरहाल आंकड़ों में विभिन्न किस्म के रूझान हो सकते है। जैसे– आंकड़े कुल मिलाकर बढ़ते या घटते दिखाई दे सकते है। यदि हम भारत की आबादी के आंकड़े देखे, जिनका जिक्र मणि ने किया था, तो हम देखेंगे कि ये प्रत्येक जनगणना में बढ़ती जाती है। अतः इस मामले में यदि हम अब तक उपलब्ध आंकड़े का औसत निकाले तो यह आंकड़ो को निरूपित नही करेगा क्योंकि वह तो लगातार बढ़ रहे है। औसत से हमें यह भी पता नही चलेगा कि भविष्य में क्या उम्मीद करें।

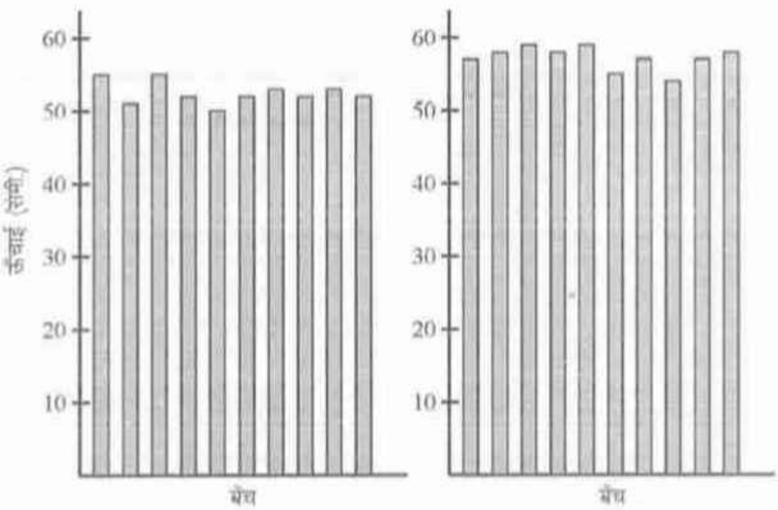
जैसा कि आप जानते है, 'औसत' निकालने के लिए हमें आंकड़ों के सारे मान संख्याओं को जोड़कर योगफल में मानों की कुल संख्या से भाग दे देते है इसका तकनीकी नाम अंकगणित माध्य (Arithmetic mean) है। इसके नाम से ही पता चलता है कि इसे निकालने में थोड़ा अंकगणित लगता है। तो यदि कोई बच्ची भाग कर सकती है तो वह औसत निकाल सकती है। लेकिन बात सिर्फ औसत निकालने की नही, बल्कि इससे आगे हम देखते है कि कक्षा 5 में पहुंचने तक अधिकांश बच्चे औसत निकाल पाते है और कई सवालो में निकालते भी हैं। किन्तु अधिकांश बच्चे औसत निकालने की वजह नही समझ पाते और यह भी नही समझ पाते कि औसत किस बात को दर्शाता है। उदाहरण द्वारा समझें–

उदाहरण 5 : शिक्षक राम ने औपचारिक ढंग से बच्चो को औसत से परिचित कराया था। उसने पाया कि बच्चे यह नही समझ पा रहे हैं कि यह क्या दर्शाता है और इसकी गणना क्यों की जाए। अतः उसने अगले सत्र में कक्षा 4 के 25 बच्चों को निम्नलिखित सवाल हल करने को दिया :

क्या कक्षा 3 की बेंचे औसतन कक्षा 5 की बैंचो से नीची है?

राम ने बच्चो से अपने–अपने उत्तर निकालने को कहा। अधिकांश बच्चो ने कहा कि बेंचे एक ही ऊंचाई की है। यह तय किया गया कि इस परिकल्पना की जांच की जाए। इसके लिए दोनो कक्षाओं से 10–10 बेंचे चुनी गई और उनको नापना तय हुआ। बेंचो का चुनाव किसी नियम के तहत नही किया गया। बच्चो ने 4 टोलियों में बंटकर यह काम किया।

अगला चरण था विभिन्न ऊंचाइयो का स्तम्भ आरेख बनाना। पहले पूरी कक्षा में इस बात पर चर्चा हुई कि इसके लिए क्या पैमाना उपयुक्त रहेगा। फिर बच्चो ने अपनी–अपनी टोलियों में स्तम्भ आरेख बनाए। ये स्तम्भ आरेख नीचे दिए गए हैं। मुर्भू ने देखा कि इन स्तम्भ आरेखों की मदद से बच्चों को आसानी से यह समझाया जा सकता है कि औसत क्या होता है।



चित्र 3

प्रत्येक चार्ट चित्र 3 में उसने लम्बे स्तम्भों के ऊपरी सिरे काट लिए और उन्हें छोटे स्तम्भो पर इस प्रकार रखा कि चार्ट के सारे स्तम्भ समान लम्बाई के हो गए। उसने बच्चो को बताया कि यह समान लम्बाई कक्षा 3 के बेंचो की औसत ऊंचाई है। बच्चो ने कक्षा 5 के चार्ट के साथ भी यही परिणाम देखा।

बच्चे देखकर बहुत खुश हुए कि औसत की जो गणना वे करते है वह चित्ररूप में ऐसी दिखती है। इसके बाद दोनो औसत नापे गए और पता चला कि उनमें बहुत थोड़ा अन्तर है।

अब राम ने उनसे पूछा कि इन परिणामों से वे क्या निष्कर्ष निकालेंगे। कुछ बच्चो ने कहा, "सब कक्षाओ में एक–सी बेंचे हैं।" अन्य बच्चो ने कहा कि तीसरी में जब वे बेंच पर बैठते थे तो उनके पैर लटकते रहते थे लेकिन जब वे पांचवी कक्षा में पहुचेंगे तो लगता है कि आराम से बैठ पाएगें।

राम ने उनकी बात सुनी और तय किया कि वह ये आंकड़े और बच्चो के निष्कर्षो के बारे में प्रधान अध्यापिका को बताएगा। शायद इससे भविष्य में स्कूल का फर्नीचर बनवाने में मदद मिलेगी।

E8) कक्षा 4 या 5 के बच्चो के साथ निम्नलिखित गतिविधि करके देखिए। बच्चो से कहिए कि वे

क) लूडो के पासे की सतहो पर बिन्दुओ की औसत संख्या पता करे।

ख) अपनी–अपनी उम्र वर्षो व महीनो में लिखे और कक्षा की औसत उम्र पता करे।

ग) पता करें कि महीने में वे कितने घण्टे सोते है, और फिर प्रतिदिन का औसत निकाले।

अब तक आपने ऐसे दो मानो का अध्ययन किया जो दिए गए आंकड़ों से प्राप्त किए जाते है। आपने कुछ ऐसी स्थितियो के उदाहरण देखे जहां ये मान आंकड़ो को निरूपित करते है और ऐसे स्थितियां भी देखी जहां ऐसा नही होता। आंकड़ो के अन्य प्रतिनिधि मान भी होते है, उदाहरण के लिए, माध्यिका (median)। आप जानते है कि जब आंकड़ों को घटते या बढ़ते क्रम में जमाया जाता है तो उनके बीच वाले मान को माध्यिका कहते है। कुछ लोगो ने अलग–अलग तरीको से बच्चो को माध्यिका की अवधारणा से परिचित कराने के प्रयास किए है। किन्तु इस्तेमाल किए गए सारे उदाहरणों में आंकड़ो का बंटन प्रसामान्य था, इसलिए माध्यिका व औसत बराबर थे। अतः बच्चो को माध्यिका, के उपयोग की कोई जरूरत महसूस नही होती।

लेकिन हमने यहां आंकड़ो को निरूपित करने वाले जिन दो मानो की बात की है, वे बच्चो के लिए सरल हैं। अलबत्ता, यह सवाल तो रहता है कि किसी स्थिति में इनमें से किसका उपयोग करें–बहुलक या औसत? यह काफी हद तक स्थिति पर निर्भर है। बहरहाल, जब आंकड़ो का बंटन, उदाहरण 3 की तरह प्रसामान्य होता है, तब ये दोनो मान करीब–करीब समान ही होते है। तब दोनो ही आंकड़ो के बारे में अच्छा अन्दाजा दे सकते है अर्थात् कुछ स्थितिगों में बहुलक व औसत लगभग एक समान होते है तथा कुछ स्थितियो मे नही होते।

E9) बच्चो से निम्नलिखित आंकड़े इकट्ठे करने को कहिए :

i) कक्षा 1 के बच्चो की ऊचांइया।

ii) बाजार में सब्जियो की कीमते।

दोनो स्थितियों में उनसे बहुलक और औसत निकालने को कहिए। उनके विचार में इनमें से कौन से मान आंकड़ो को निरूपित करते हैं और क्यों?

इस पाठ में जोर आंकड़ो के आधार पर मात्रात्मक निष्कर्ष निकालने पर था बहुलक व औसत की अवधारणाएं मुलतः मात्रात्मक प्रकृति के है। पर हमारा लक्ष्य यह है कि बच्चे आंकड़ो का अर्थ देख पाएं, उनसे निष्कर्ष निकाल पाएं और सम्भव हो तो इससे भविष्य में क्या हो सकता है बता पाएं।

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित मुद्दो पर चर्चा की :

1. आंकड़ो से उभरने वाले सार्थक कथनो की बात की।
2. आंकड़ो से उभरने वाले सवालो के उदाहरण देखे।
3. प्रासंगिक आंकड़ो के विश्लेषण से परिकल्पनाओं और उनके सत्यापन की चर्चा की।
4. प्राथमिक स्कूल के बच्चो को बहुलक व औसत की अवधारणा से परिचित कराने के तरीके सुझाए।

पाठ – 14
संभावना के बारे में सीखना

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- संभावना के बारे में बच्चों की धारणाएँ
- क्यों सिखाएँ बच्चों को संभावना की बातें?
- सारांश

परिचय

पिछले पाठ में हमने देखा कि प्राथमिक स्कूल के स्तर पर ही बच्चों को आंकड़ों का इस्तेमाल सिखाना जरूरी है। बच्चे कई प्रकार के आंकड़ों से परिचित होते हैं और वे व्यापकीकरण, चयन और निर्णय लेने के लिए आंकड़ों का उपयोग भी करते हैं। हम बच्चों को आंकड़ों का विश्लेषण करने व कुछ पूर्वानुमान लगाने की क्षमताएं विकसित करने में मदद कर सकते हैं और बच्चे ऐसे सवालों के बारे में सोचे जिनमें आंकड़ों से निष्कर्ष निकालना हो या उनकी कभी अपने पर्यावरण में घटने वाली घटनाओं के बारे में पूर्वानुमान लगाने की जरूरत पड़ी हो। उनके जीवन में ऐसे मौके आएंगे जब उन्हे यह फैसला करना होगा कि कौन सी घटना ज्यादा सम्भव है और किन वस्तुओं की सम्भावना बराबर हैं। इस पाठ में हम इन सभी के बारे में पढ़ेंगे साथ ही देखेंगे कि संभावना के बारे में हमारी व बच्चों की समझ अलग–अलग होती है। जाहिर है यह समझ हर व्यक्ति के अपने अनुभव पर आधारित होती है।

बच्चों को सम्भावित परिणाम, संभावना व अन्य संबंधित बातों से परिचित कराना जरूरी है। क्योंकि इससे हम सबको अपने सामाजिक व अन्य पूर्वाग्रहों के विश्लेषण में मदद मिल सकती है। उनकी संभावना की उपयुक्त समझ हम सबको बेहतर निर्णय लेने में मददगार हो सकती है।

उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- यह समझ पाएंगे कि प्राथमिक स्कूल के बच्चों को संभावना व संबंधित अवधारणाएं क्यों सीखना चाहिए।
- बच्चों को ये अवधारणाएँ समझाने के कारगर तरीके सुझा पाएँगे।

संभावना के बारे में बच्चों की धारणाएं

आम प्राथमिक स्कूलों में बच्चों को प्रायिकता की खोजबीन करने और संभावना के अर्थ को समझने का कोई मौका नहीं दिया जाता। लेकिन अपने आसपास की दुनिया में इसकी जरूरत होती है

कि हम किसी घटना के होने की सम्भावना के आधार पर फैसला करें। प्रायिकता का ज्ञान ऐसी स्थितियों में हमें सही निर्णय लेने में मदद करता है। लेकिन हम बच्चों को प्रायिकता से परिचित इसलिए नहीं कराते हैं कि हम सोचते हैं कि उन्हे निर्णय लेने या सम्भावना से कोई लेना–देना नही है क्या हमारा ऐसा सोचना सही है?

एक सर्वेक्षण के दौरान हमने 9 से 15 वर्ष की उम्र के 50 बच्चों से निम्नलिखित विषयों पर सवाल पूछे :

(i) एक झोले में विभिन्न रंगों की गेंदे है और एक विशेष रंग की गेंद निकालना है

(ii) ऐसी घटनाएं जो 'संभावना' से जुड़ी हैं

(iii) 'भाग्य' क्या है ?

(i) **सवाल** : मेरे पास एक झोला है जिसमें 7 काली और 3 सफेद गेंदे है। यदि मैं इसमें से एक गेंद निकालूं तो वह किस रंग की होगी? तुम जो रंग बताओ उसका कारण भी बताओ।

लगभग 30 प्रतिशत बच्चों ने कहा कि काली गेंद निकाली जाएगी क्योंकि काली गेंद की संख्या ज्यादा है। कई और बच्चों ने भी कहा कि काली गेंद निकलेगी मगर उनके कारण अलग थे। जैसे मुझे वह रंग पसंद है या क्योंकि वही मेरे कुत्ते का भी रंग है आदि। कुछ बच्चों ने कहा कि सफेद गेंद निकलेगी क्योकि 'सफेद रंग शक्ति का प्रतीक होता है या सफेद छूने में बहुत अच्छा लगता है' कुछ बच्चे चक्कर में पड गए और कहने लगे कि जब तक वे यह प्रयोग करके न देख लें तब तक कुछ नहीं कह सकते।

अब मैंने सारे बच्चों से पूछा कि मेरे पास एक झोले में 7 सफेद और 5 लाल गेंद है। मैने उसमें से एक गेंद निकाली और देखा कि वह सफेद है। मैने उसे वापिस झोले में डाल दिया और झोले को अच्छी तरह हिलाया। अब झोले में से एक और गेंद निकाली। बताओ उसका रंग क्या था?

सिर्फ 20 प्रतिशत बच्चों ने कहा कि वह गेंद सफेद थी क्योंकि झोले में लाल, की अपेक्षा सफेद गेंदे ज्यादा हैं। कुछ अन्य बच्चों ने कहा कि गेंद सफेद होगी सफेद शांति का रंग है या वह अच्छा रंग है या क्योंकि सफेद गेंदे फटती नही आदि। कई बच्चों ने कहा कि लाल गेंद निकलेगी क्योंकि–

- मुझे लाल पसंद है
- लाल रंग की गेंद छूने में अलग ही लगती हैं
- सफेद गेंदे ज्यादा है और जो होने की सम्भावना कम होती है वही बात अक्सर हो जाती है। (15 वर्षीय बच्चे का जवाब)
- खुशी के बाद गम आता ही है।
- जब हम झोले को हिलाएंगे तो नीचे की वस्तु ऊपर आ जाएगी।

अधिकांश बच्चों के उत्तरों से किसी न किसी संबंध का आभास मिलता है। यह तो लगता है कि बच्चे काफी कम उम्र में ही इन मुद्दों पर कुछ धारणा बना लेते हैं।

चित्र 1 : कौन से रंग की गेंद को चुनने की ज़्यादा प्रायिकता है?

E1) कक्षा 3–5 के 10–15 बच्चों के साथ इसी प्रकार का अभ्यास कीजिए। अपने अवलोकन लिखिए व देखिए कि ये अवलोकन हमारे द्वारा प्रस्तुत आंकड़ों से कितने अलग है?

(ii) अपना सर्वेक्षण जारी रखते हुए मैंने बच्चों से किसी ऐसी घटना का उदाहरण देने को कहा जिसे वे 'संभावना' से जोडते है। इसके जवाब में घर या सड़क पर घटी विभिन्न किस्म की दुर्घटनाओं के वर्णन या किसी की लॉटरी जीतना या अपने खोए हुए दोस्त से मुलाकात के ब्यौरे थे। सारे उत्तरों में ऐसी घटनाएं बताई गई थी जो होती तो है किन्तु कभी कभार। इससे पता चलता है कि बच्चों के दिमाग में 'संभावना' की धारणा का संबंध ऐसी घटनाओं से है जिनके होने की प्रायिकता बहुत कम हो।

चित्र 2

जब हम 'संभावना' के बारे में बाते कर रहे थे तब कक्षा 4 के एक बच्चे ने यह कथन दिया। अन्य बच्चों ने भी इसका उपयोग सहजता से इस अर्थ में किया कि यह किसी घटना के होने या न होने की संभावना से संबंधित है, न सिर्फ कभी कभार होने की। हमें बच्चों की इस तरह की सहज समझ को आगे बढ़ाना व मजबूत करना चाहिए।

E2) 8–9 वर्षीय बच्चों से तथा कुछ बड़ों से भी पूछिए कि वे 'संभावना' को किस तरह की घटनाओं से जोड़ते हैं। उनके उत्तरों से क्या समझ झलकती है? आपको बच्चों और बडों के उत्तरों के प्रकार में क्या अन्तर दिखते हैं?

(iii) **'भाग्य'** – हमने इन 50 बच्चों से पूछा कि वे खुद को भाग्यशाली मानते हैं या नही, और क्यों?

अधिकांश बच्चों ने कहा कि वे भाग्यशाली हैं। ऐसे कहने के आम कारण निम्नानुसार थे :

- मैं अच्छे घर में रहती हूं,
- मैं अच्छे स्कूल में पढ़ती हूं,
- मुझे परीक्षा में अच्छे नम्बर मिलते हैं,
- मैं एक इन्सान हूं।

कुछ बच्चों ने खुद को अभागा बताया, उनके कारण थे :

- मेरी परीक्षा अच्छी नही हुई,
- मेरे पिता काम नही करते,
- मैं परीक्षा में इतना अच्छा लिखती हूं फिर भी मुझे अंक नहीं मिलते।

चित्र 3

हमने उनसे यह भी पूछा कि क्या वे किसी ऐसे व्यक्ति को जानते हैं जो अभागा हो। 70% बच्चों ने कहा कि अभागे वे हैं जो जीवन में सफल नहीं होते, जो परीक्षा में फेल होते हैं, जो गरीब हैं और जिनके पास खाने पहनने को कुछ नहीं है। बच्चों के उत्तर से स्पष्ट था कि भाग्यशाली लोगों के साथ अच्छी घटनाएं घटना निश्चित है। अर्थात् भाग्यशाली व्यक्ति के साथ अच्छा होने की सम्भावना बहुत अधिक है।

E3) आपके मुताबिक 'संभावना' और 'भाग्य' के बीच क्या संबंध है?

हमने देखा कि बच्चे संबंध स्थापित करते है। यह कई विशिष्ट उदाहरणों से व्यापकीकरण करने की उनकी क्षमता पर आधारित है। किन्तु उनके लिए ये व्यापकीकरण सिर्फ सम्भावित नही, बल्कि निश्चित होते हैं। बड़े होने पर जरूर वे किसी वस्तु के होने की 'संभावना' यानी उसकी प्रायिकता का मापन करने की कुछ धारणा

विकसित कर लेते है इस समझ को बदलने और पुष्ट करने की जरूरत होती है। अब हम इसी बात पर विचार करेगें कि यह क्यों जरूरी है।

क्यों सिखाएं बच्चों को संभावना की बातें?

हमने देखा कि बच्चों में संभावना की कुछ समझ होती हैं। लेकिन शायद वे यह नहीं समझते कि किसी बात के होने की सम्भावना बदलती रहती है और इसे नापा जा सकता है। अब हम उनकी यह समझ विकसित करने के दो प्रमुख कारणों को देखें।

(i) विकल्पों को तोलना

बच्चे और बड़े दोनों को बार–बार ऐसे विकल्पों के बीच फैसला करना होता है जिनमें अच्छे और बुरे दोनों तरह के पहलू तकरीबन बराबर–बराबर होते हैं। कई लोग सिक्का उछालकर इस बात का फैसला कर लेते हैं। जैसे– फुटबाल या हॉकी के खेल में सिक्का उछालकर फैसला किया जाता है कि गेंद को पहले कौन मारेगा। आपने बच्चों को यह कहते सुना होगा, "चलो सिक्का उछाल लेते हैं चित आया तो फिल्म देखेंगे और पट आया तो पार्क जायेंगे।" और फिर, अगर दो से अधिक विकल्पों के बीच फैसला करना पड़े, तो पासे या उंगलियों का इस्तेमाल किया जाता है। बच्चे पासों से कई खेल खेलते हैं। जिनमें पासा फेंककर आए अंक के अनुसार अपनी–अपनी गोटियाँ चलनी होती है।

एक सर्वेक्षण के दौरान हमने कक्षा 3 के कुछ बच्चों से पूछा था "पासा फेंकते समय कौन सा अंक सबसे मुश्किल से आता है?" अधिकांश बच्चों ने जवाब दिया कि 6 आना सबसे कठिन है।

कुछ बच्चों ने कहा कि 6 आने की सम्भावना उतनी ही है जितनी किसी और अंक की। एक बच्ची ने कहा, "जो अंक चाहिए, वह कभी नहीं आता।" कई बच्चों ने कहा, "जो अंक हमें चाहिए, वही लाना सबसे मुश्किल होता है और यह भाग्य पर निर्भर है। अगर हमारी किस्मत अच्छी हुई, तो हमें मनचाहा अंक आ जाएगा। और, एक तरीका होता है जिससे जब चाहो, तब 6 आ जाता है।"

"क्या 5 बार सिक्का उछालने पर चित आ सकते हैं? "इस सवाल के जवाब में विभा ने कहा, हाँ यह भी हो सकता है कि सिक्का उछालने पर लगातार 10 चित आ जाएं, हम कुछ नहीं कह सकते। "जब पूछा गया कि 1000 बार सिक्का उछालने पर चित की संख्या के बारे में वह क्या कहेगी, तो पहले तो उसने 500 चित बताया। जब पूछा गया कि क्यों, तो उसने इस बारे में थोड़ा और सोचकर कहा, "1000 बार उछालने पर भी सारे चित आ सकते है, या 600 चित या 500 के आसपास कितने भी चित आ सकते है।"

कक्षा 3,4 और 5 के बच्चो पर किए गए एक सर्वेक्षण में हमने पाया कि अधिकांश बच्चे मानते हैं कि यदि सिक्के को 5 बार उछाला जाए तो लगातार 5 चित आने की सम्भावना चित–पट, चित–पट आने की सम्भावना से कम है और यदि कोई व्यक्ति एकदम बदनसीब न हो, तब उसके साथ कोई बुरी बात होगी तो भरपाई के लिए कोई अच्छी बात भी जरूरी होंगी। ये धारणाएं व अन्तर्सम्बंध कैसे बने होंगे? क्या ये अनुभव लोगों द्वारा कही बातें सुन–सुनकर बने होंगे? यदि शुरू से ही हम बच्चों के इन विचारों को बदलने में मदद करना चाहते है, तो हमें इनके कारण खोजने होंगे।

जैसे– यह समझने में बच्चों की मदद करना जरूरी है कि जब सिक्के को अधिक बार उछाला जाता है तो धीरे–धीरे चित व पट की संख्या बराबर होने लगती है। उन्हें यह समझना होगा कि यदि ईमानदारी से खेल हो, तो प्रत्येक खिलाड़ी लगभग बराबर बार जीतता या हारता है। हालांकि यह जरूरी नहीं है कि 'प्रायिकता' शब्द का इस्तेमाल किया जाए, किन्तु बच्चों को यह समझना चाहिए कि यह अनिश्चितता नापने का एक तरीका

है। तथा यदि किसी घटना में जोखिम शामिल है, तो उसके वाकई घटित होने की कितनी संभावना है। जैसे– कोई भी टीका 100 प्रतिशत सुरक्षा नहीं देता और कभी–कभी टीके के अनचाहे प्रभाव भी होते है। तो टीका दिया जाना चाहिए या नही? यह फैसला इस बात पर निर्भर करेगा कि वह टीका कितना कारगर है और उसके अनचाहे प्रभाव किस तरह के हैं। मान लीजिए कि एक टीका है जो 1000 में से 800 मामलों में सुरक्षा प्रदान करता है और टीका न लगवाने पर बीमारी होने की सम्भावना बहुत ज्यादा हैं। तब दोनों विकल्पों में मौजूद जोखिम को तौलकर हम टीक लगवाएं या न लगवाएं। बच्चो और बड़ो में प्रायिकता की ऐसी मोटी समझ व उपयोग की क्षमता को विकसित करना जरूरी है।

चित्र 4

E4) संभावना की ऐसी 5 स्थितियां बताइए जो बच्चो के सामने रोजमर्रा के जीवन में आ सकती हैं?

हमें यह सुनिश्चित करना होगा कि बच्चे विभिन्न स्थितियों में सार्थक रूप से 'संभावना' के विचार से जुड़ पाएं। वे सम्भावना और अचानक हुई घटना को एक न मान बैठें। इसलिए जरूरी है कि बच्चों को कम उम्र से ही इन धारणाओं से परिचित कराया जाए। हमें इस बात में भी बच्चों की मदद करनी चाहिए कि वे अपने पूर्वाग्रहो की जांच करें और देखें कि वे किस हद तक सही या गलत हैं।

(ii) सामाजिक पूर्वाग्रह

हम सभी आसपास की दुनिया के बारे में अन्तर्सम्बंध खोजते हैं और व्यापकीकरण करते हैं। ये व्यापकीकरण अंधविश्वासों, धारणाओं व पूर्वाग्रहों के आधार पर बन जाते हैं। ये संदेश बच्चो के चारों ओर बिखरे होते हैं तथा ये उनके व्यक्तित्व व धारणाओं को प्रभावित करतें है। ऐसी कई सामाजिक धारणाएं पीढ़ी–दर –पीढ़ी चलती रहती है जैसे– जहाँ पुत्र जन्म की कामना की जाती है, वहाँ बेटी का जन्म होने पर माँ को दोष दिया जाता है। आपको कुछ ऐसे लोग मिलेंगे जो मानते हों कि लड़किया गणित और विज्ञान सीख ही नहीं सकती हैं। या यह कि गरीब लोग गैर–जिम्मेदार और आलसी होते हैं। अन्य समुदायों के बारे में भी ऐसे शायद कई पूर्वाग्रह होंगे। और उन तमाम अंधविश्वासो के बारे में क्या कहा जाए जो कई बच्चे और बड़े पालते है। बिल्ली रास्ता काट जाए या किसी महत्वपूर्ण कार्य से पहले कोई छींक दे, तो हममें से कई लोग परेशान हो जाते हैं। परीक्षा की तैयारी में भिड़े बच्चे कई टोटके करते है क्योंकि उनको विश्वास होता है कि ऐसा करनें पर उन्हें परीक्षा में मदद मिलेगी। क्या ये विश्वास या धारणाएं तर्कसंगत हैं? या क्या हमारी इस धारणा को तर्कसंगत कहा जा सकता है कि किसी वर्ग विशेष के लोग गंदे या अनपढ़ होते है?

इन सामाजिक पूर्वाग्रहों और अंधविश्वासों को प्रायिकता के जरिए बदला जा सकता है। इसके लिए बच्चों को यह सोचना होगा कि क्या उनकी धारणाएं तर्कसंगत है और इसके लिए उनसे कहा जाए कि वे कथनों की तुलना अपने सारे अनुभवों से और अपने आसपास के लोगों के अनुभवों से करें। तब वे इन आंकड़ों का विश्लेषण करके देख पाएंगे कि उनके पूर्वाग्रह कितनी सही या गलत है।

E5) 2 सामाजिक पूर्वाग्रह चुनकर उन्हें परिकल्पानाओ में बदलिए। इसके बारे में आंकड़े इकट्ठे कीजिए। आप इन परिकल्पनाओं की सत्यता या असत्यता की जांच कैसे करेंगे?

यदि हम चाहते हैं कि हमारे बच्चे तार्किक रूप से सोचें और बेहतर व तर्कसंगत धारणाए निर्मित करें, तो जरूरी है कि हम उन्हें 'भाग्य', 'सम्भावनाओं' और असम्भवता के बारे में विचार करने को प्रेरित करें।

बच्चो के लिए गतिविधियां

उछाल सं.	क्या आया
1	☐
2	☐

इस भाग में हम ऐसी कुछ गतिविधियां सुझाएगें जो प्रायिकता से सम्बंधित अवधारणाओं को समझने में बच्चों के लिए मददगार हो सकती हैं।

बच्चों को कहिए कि वे सिक्के को कई बार उछालें और हर बार नोट करें कि चित आया या पट। प्रत्येक टोली इन आंकड़ो को चित्र 5 में बताए अनुसार तालिका बनाकर दर्ज करे।

चित आने पर गोला (○) और पट आने पर चौकोर (□) का निशान लगा सकते हैं। 15 बार सिक्का उछालने के बाद यह देखे कि कौनसा निशान ज्यादा लंबे समय तक दोहराया जा रहा है जैसे– क्या लगातार 6 बार चित आया? या कितनी बार तक चित–पट एक के बाद एक आए? प्रत्येक टोली से कहिए कि वह अपनी–अपनी सबसे लम्बी श्रृखंला को पहचानकर लिख लें।

आप छात्रों से उछालों के परिणामों में पैटर्न खोजने को कहें। जैसे– क्या दो पट के बाद एक चित अथवा दो चित के बाद एक पट आता है, या चित और पट लगातार एक के बाद एक आते हैं। अब उनसे 15 से ज्यादा बार सिक्का उछालकर प्रत्येक 10 उछाल के बाद परिणामों को दर्ज करने को कहिए। अब सबसे लम्बी श्रृखंला कौनसी है? क्या कोई पैटर्न है?

E6) आपके विचार में बच्चे इस गतिविधि से क्या सीख रहें है? यह गतिविधि प्रायिकता की उनकी समझ बनाने में क्या योगदान देगी?

इस गतिनिधि को कई तरह से बदलकर ज्यादा चुनौतिपूर्ण बनाया जा राकता है जैसे –

गतिविधि 2

एक बार जब बच्चे यह लिख लें कि हर बार सिक्का उछालने पर क्या आता है, तो उनसे कहिए कि वे अगले उछाल के परिणाम के बारे में अनुमान लगाने की कोशिश करें। प्रत्येक बार सिक्का उछालने से पहले टोली के प्रत्येक सदस्य को बताना होगा कि अब क्या आने वाला हैं– चित या पट। उनके अनुमानों को लिखकर रखा जा सकता हैं। बच्चे 'पता नहीं' भी कह सकते हैं।

प्रत्येक टोली ऐसा 20 बार करे। इसके बाद बच्चों से पूछिए कि क्या कोई सदस्य बीसों बार सही अनुमान लगा पाया। सबसे ज्यादा सही अनुमान किसका रहा और कितनी बार? उनसे यह बताने को कहिए कि यदि सिक्के को 50 बार उछालकर देखा जाए तो क्या होगा? क्या इससे पूर्वानुमान में सुधार होगा? यदि जरूरी हो, तो बच्चे टोलियों में ऐसा करके देखें कि परिणामों में कोई अंतर है या नहीं।

गतिविधियों के साथ–साथ आप बच्चो को कहानियों के रूप में कुछ सवाल भी दे सकते है।

नरेश और सीमा लूडो खेल रहे थे। सीमा ने कहा, "मैं अब पांसा फेंककर छः ले आंऊंगी।" सीमा ने पासा फॅंका और छः आया। उसी खेल में ऐसा 5–6 बार हुआ। इससे नरेश नाराज हो गया। वह रो–रोकर कहने लगा कि सीमा पासा फेंकने में बेईमानी कर रही है। सीमा कहती रही, "मैं तो बगैर देखे पांसे को हिलाकर फेंक रही हूँ। मैं पासे को उंगली से पकड़ भी नहीं रही हूँ। तो मैं जानबूझकर छः कैसे ला सकती हूँ?" नरेश नही माना और कहता रहा कि पासा फेंकने में बेईमानी कर रही है।

[?] क्या तुम्हे लगता हैं कि सीमा बेईमानी कर रही थी और क्यों?

[?] क्या तुम पासे को इस तरह फेंक सकते हो कि हर बार तुम्हारे मन चाहे अंक आएं? कैसे?

[?] पासा फेंकने या सिक्का उछालने के खेल में क्या यह सम्भव है कि एक ही व्यक्ति लगातार जीते? क्यों?

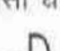
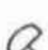
E7) क) गतिविधि 2 से बच्चो को किस तरह की क्षमता का विकास करने में मदद मिलती है?

ख) इसी क्षमता का विकास करने में बच्चो की मदद के लिए एक और गतिविधि सुझाइए।

ग) एक कहानीनुमा सवाल बनाइए जिससे बच्चो को यह समझने मे मदद मिलें कि संभावना का संबंध सिर्फ कम प्रायिकता वाली घटनाओं के घटित होने से नही हैं।

अगले उदाहरण में दिखाया गया है कि शिक्षक बच्चो को अधिक संभव और कम संभव घटनाओं की समझ स्पष्ट करने में कैसे मदद कर सकते हैं तथा इकट्ठे किए गए आंकड़ो से संम्बधित घटना के होने की सम्भावना बच्चे कैसे मालूम करना सीख सकते हैं।

उदाहरण 1 : एक दिन सूरजा ने कक्षा 3 के 20 बच्चों को 3–3 या 4–4 की टोलियों में बांट दिया। एक टोली को उसने एक पासा , दूसरी टोली को 2 पासे, तीसरे टोली को एक साधारण ड्रॉइंग पिन आदि दे दिए। अब उन्होंने प्रत्येक टोली से कहा कि वह अपने पासे (या 2 पासो, या ड्रॉइंग पिन) को फेंके और देखे कि क्या अंक आता है (या अंको का कौन सा जोड़ा आता है, या पिन ऐसे गिरती है या ऐसे)? उसने उनसे कहा कि वे इस प्रयोग को कई बार करके अपने–अपने परिणाम लिख लें।

थोड़ी देर बाद सूरजा ने उनसे पूछा कि क्या वे अपने द्वारा एकत्र आंकड़ो में कोई पैटर्न देख पा रहे हैं? इस आधार पर क्या वे बता सकते है कि, जैसे– क्या यह सम्भव है कि एक पासा फेंककर 7 अंक आएगा? वह प्रत्येक टोली के साथ बातचीत कर यह बताने को कहती कि कौनसी घटना असम्भव है और कौनसी बहुत सम्भव जैसे– 'पिन टोली' में दुर्गा से पूछा कि क्या पिन इस तरीके से  गिर सकती है। दुर्गा ने हँसते हुए कहा, "बिल्कुल नही।"अब सूरजा ने उससे एक और गिरने का 'असम्भव' तरीका और एक बहुत 'सम्भव' तरीका बताने को कहा। दुर्गा ने थोड़ा सोचकर असम्भव तरीका बताया , 'सम्भव तरीके' के बारे में उसने कहा, हाँ, 'यह  या हो सकता है।'

इसी तरह अलग–अलग टोलियों से सूरजा ने असम्भव, बहुत सम्भव और बराबर सम्भावना वाली घटनाओ के उदाहरण इकट्ठे किए। जैसे– एक बच्ची ने कहा, "एक पांसे से 10 लाना असम्भव है, जबकि दो पांसो से सम्भव है।" एक और बच्चे ने कहा, "मैंने 10 बार पांसे को फेंका तो 4 तीन बार आया, 6 दो बार, 5 दो बार और 2 तीन बार आया।यानी 1 आना असम्भव घटना है।" इसे सुनकर अन्य बच्चे उससे बहस करने लगे और पांसा उछालकर उसे दिखाने लगे कि 1 आना सम्भव है।

कक्षा बड़े जोश और शोरगुल के माहौल में खत्म हुई। सूरजा ने उनसे वायदा किया कि अगले दिन भी वे इतनी ही रोचक गतिविधि करेंगे।

E8) आपको क्या लगता है, सूरजा ने बच्चों को वे गतिविधिया किस मकसद से दी थीं?

E9) कक्षा 3 व 6 से निम्न गतिविधि करवाइए : एक साथ 5 सिक्के उछालो और प्रत्येक उछाल के बाद चित व पट की संख्या देखो। ऐसा 10 बार करो और चित व पट का पैटर्न देखो। इसे 50 बार दोहराओं। फिर बच्चो से पूछिए कि क्या इस बार उन्हें कुछ अलग पैटर्न नजर आता है तथा 50 बार सिक्के उछाल लेने के बाद क्या वे यह अनुमान लगा सकते है कि अगले उछाल में या अगले 3 उछालों में कितने चित आंएगे?

बच्चे जब इस गतिविधि को करें, तो उनका अवलोकन कीजिए। क्या कक्षा 3 व कक्षा 6 के बच्चों के गतिविधि करने के तौर–तरीकों में कोई अन्तर दिखाई पड़ते है? यदि हाँ, तो क्या अन्तर है?

गतिविधि 3 (चित पट की दौड़)

इस खेल में एक से अधिक बच्चे खेल सकते हैं। प्रत्येक बच्ची एक सिक्का उछालती है। यदि चित आए तो वह सीढ़ी के एक चित्र पर एक पायदान चढ़ती है और पट आए तो एक पायदान उतरती है। यह सीढ़ी एक कागज पर बनाई जा सकती है और इसकी बीच वाली पायदान को शून्य रेखा कह सकते है (चित्र 6) जैसे– यदि किसी बच्ची का चित आया तो वह बिन्दु 'A' पर पहुंच जाएगी। यदि एक बार फिर चित आया तो वह बिन्दु 'B' पर पहुचेंगी। यदि तीसरी चाल में उसे पट आया तो वह लौटकर बिन्दु 'A' पर आ जाएगी।

चित्र 6

जो भी सबसे पहले शून्य से 5 पायदान ऊपर या नीचे पहुंचेगी, वही जीतेगी। सारे बच्चे अपने–अपने चालों का रिकॉर्ड रखें, इन सबको बाद में दीवार पर लगाकर बच्चो से इनमें पैटर्न देखने को कहें। बच्चे शायद यह देख पाएं कि अधिकांश बच्चे शून्य से एक–दो पायदान दूर ही हैं। (ऐसा क्यों होता है?)

यदि प्रत्येक बच्ची सौ बार सिक्का उछाले, तो क्या ज्यादा बच्चे शून्य रेखा से दूर होंगे? आप बच्चो से इस तरह के सवाल पूछ सकते हैं तथा इस गतिविधि को बढ़ा सकते हैं।

गतिविधि 4

बच्चों को टोलियों में बांट दीजिए। एक थैली में दो रंगो (जैसे काले व सफेद) की 10 गेंदें रखिए। शुरू में बच्चो को बता दीजिए कि किस रंग की कितनी गेंदें रखी गई हैं। अब उनसे कहिए कि आप एक गेंद निकालने वाले है और उन्हें अनुमान लगाना है कि वह गेंद किस रंग की होगी और सही अनुमान के लिए अंक भी दिए जा सकते हैं। आप बच्चों से पूछ सकते हैं: क्या काली गेंद आने की सम्भावना आधी–आधी है? क्या सफेद गेंद निकालने की सम्भावना, सिक्का उछालने में चित आने की सम्भावना से ज्यादा है?

गतिविधि के अगले चरण में आप उल्टी तरफ से शुरू कर सकते हैं। बच्चों को थैली में गेंदो की कुल संख्या बता दीजिए। अब 10 बार एक–एक गेंद निकालिए, और दिखाकर वापिस थैली में डाल दीजिए। इसके आधार पर उनसे यह अन्दाजा लगाने को कहिए कि थैली में कितनी काली व कितनी सफेद गेंदे हैं। फिर 40 बार एक–एक गेंद निकालकर उन्हें यही अनुमान लगाने को कहिए।

E10) गतिविधि 3 व 4 से बच्चो को कौन सी अवधारणाएं सीखने मे मदद मिलती है?

एक गतिविधि यह भी हो सकती है कि बच्चे अपने घर के सामने से गुजरने वाले प्रत्येक वाहन की नम्बर प्लेट देखें। यदि नम्बर विषम संख्या हो, तो ✓ तथा सम संख्या हो तो X निशान लगाये। 20 वाहनों के अवलोकन के आधार पर उनसे इक्कीसवें वाहन के बारे में अनुमान लगाने को कहे।

इस तरह की गतिविधियों के अन्य रूप भी सोचे जा सकते हैं। मगर सिर्फ गतिविधि करा देना महत्व नही रखता। महत्व तो इस बात का है कि बच्चो व शिक्षक के बीच इस बारे में सक्रिय चर्चा हो कि विभिन्न घटनाएं कितनी सम्भव या असम्भव हैं। बच्चो को प्रेरित किया जाना चाहिए कि वह पहले तर्क आधारित अनुमान लगाएं और फिर प्रयोग के जरिए जांचकर तय करें कि क्या वे पूर्वानुमान सही है, या उनमें फेरबदल करके जांचा जा सकता है।

सामाजिक पूर्वाग्रहों की बेहतर समझ बनाने के लिए इसी तरह की गतिविधियां और चर्चाएं आवश्यक है।

E11) बच्चो के किसी समूह से बातचीत करके पता कीजिए कि शहर में रहने वाले लोगों के किसी समूह के बारे में उनके क्या पूर्वाग्रह हो सकते हैं, इसकी एक ऐसी गतिविधि की रचना कीजिए जिसमें वे इस पूर्वाग्रह से सम्बन्धित आंकड़ें एकत्र करें। आप इसका उपयोग किस तरह करेंगे ताकि बच्चो को यह समझने में मदद मिले कि उनका पूर्वाग्रह जायज था या नही?

सारांश

1. बच्चे अपने अनुभव के आधार पर कुछ घटनाओं के होने के बारे में संम्बंधो को अपने मन में जोड़ लेते हैं। इसके आधार पर वे 'संभावना' व 'भाग्य' के बारे में भी कुछ समझ बना लेते हैं।

2. बच्चो की 'संभावना' की धारणा को इस तरह विकसित करे कि वे इसे ज्यादा वास्तविक ढंग से समझ पाएं। इससे उन्हें ऐसी स्थितियों में ज्यादा जानकार निर्णय लेने में मदद मिलेगी जहाँ उनका सामना एक से दिखने वाले विकल्पों से होता हैं। इससे उन्हें अपने सामाजिक व अन्य पूर्वाग्रहो तथा अंध–विश्वासो का विश्लेषण करके यह तय करने में मदद मिलेगी कि वे जायज हैं या नहीं।

3. छोटे बच्चों के लिए उपयुक्त ऐसी कई रोचक गतिविधियां सुनाई गई हैं जो बच्चो में प्रायिकता की समझ विकसित करने में मददगार होंगी।

इकाई 5 के पाठ 13, 14, 15 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

पाठ 13 : आँकड़ों का इस्तेमाल सीखना

E2 मान लीजिए एक व्यक्ति, एक नई तरह की मशीन खरीदना चाहता है, तो वह अपने दोस्तों, पड़ोसियों आदि से पूछताछ करके कुछ अनौपचारिक तौर पर उस मशीन के बारे में मालूम करेगा, आँकड़े इकट्ठे करेगा व इस आँकड़ों से वह कुछ निष्कर्ष निकालेगा।

E3 (ख) जैसे उत्तर भारत में 'गिल्ली डण्डा' खेला जाता है। देश के कई हिस्सों में कंचे खेले जाते हैं। यह पता करने के लिए कि क्या इनमें आँकड़े उत्पन्न होते हैं। आपको अपने आसपास लागू होने वाले इन खेलों के नियम पता करने होंगे क्योंकि ये नियम अलग–अलग जगह पर अलग–अलग होते हैं।

E5 (क) जिन इलाकों के लोग लिखित अंकों से परिचित नहीं है, वहाँ आपको ठोस टोकन का उपयोग ज्यादा देखने को मिलेगा।

(ख) माचिस की तीलियों और बोतल के ढक्कनों का उपयोग टोकन के रूप में हो सकता है।

E8 हमारा सुझाव यह नहीं है कि आप बच्चों को 'बारम्बारता तालिका' की औपचारिक परिभाषा बता दे। हम कह रहे हैं कि ऐसा करना जरूरी है। परिभाषा के बगैर भी बच्चे आसानी से इस तरह की तालिकाएँ बता सकते हैं और उनसे सार्थक निष्कर्ष भी निकाल सकते हैं

(ख) बच्चों ने किस वस्तु का उपयोग किया– टोकन का, आइकन का अथवा दोनों?

पाठ 14 : आँकड़ों से निष्कर्ष निकालना कैसे सिखाएँ

E1 (क) कहा गया है कि ये निष्कर्ष आँकड़ों से उभरे हैं। हमें यह निर्णय करना है कि इनमें से कौन से निष्कर्ष उपयोगी हैं।

जैसे "उपस्थिति में बहुत उतार–चढ़ाव होता है" एक उपयोगी निष्कर्ष है क्योंकि इसका यह अर्थ निकलता है कि हम प्रतिदिन कक्षा में एक निश्चित संख्या की उम्मीद नहीं कर सकते।

E2 हमें जो आँकड़े प्राप्त हो उन्हें स्कूल या विशिष्ट समूहों में वर्गीकृत करके उनका विश्लेषण किया जा सकता है। जैसे– एक समूह उन बच्चों का हो सकता है जो खुद अपना रोजगार प्राप्त करना चाहते हैं। आप विस्तार में लिखिए कि आपने इन आँकड़ों से निष्कर्ष निकालने में बच्चों की मदद कैसे की। यदि और आँकड़े इकट्ठे किए जाएं तो निष्कर्षों मे किस तरह के परिवर्तन आएँगे?

आप बच्चों से, उन इलाके में कितने परिवार रहते हैं और उन परिवारों में से कितने व्यक्ति खेलकूद में भाग लेते हैं, के आँकड़े एकत्र करवा सकते हैं। आप बच्चों से उन व्यक्तियों की उम्र भी पता करने को कह सकते हैं जो खेलकूद में भाग लेते हों।

E3 आपको यह तय करना है कि क्या यह परिकल्पना सही है। इसके लिए सबसे पहले आपको कक्षा 6 के बच्चों के कदों की जानकारी चाहिए। आप यह कैसे पता करेंगे?

E4 यह पहले किए गए उस अभ्यास के समान है जिसमें आपने बच्चों के साथ काम करते हुए आँकड़े एकत्र किए थे। यहाँ ऐसे आँकड़े एकत्र किए जाएं जिनका बंटन ऐसा हो कि अधिकांश आँकड़े मध्य बिन्दु के निकट हो। जैसे– कक्षा के बच्चों के जूतों की साइज या लोग दिन में कितनी बार भोजन करते हैं या परिवारों में सदस्यों की संख्या आदि। जब आँकड़े इकट्ठे हो जाएँ तो बच्चों से उन्हें चित्र रूप में प्रस्तुत करने को कहा जा सकता है। इसका उपयोग करके सवाल की उनकी समझ पर चर्चा की जा सकती है। इस प्रक्रिया में आपको उनकी यह मदद करनी है कि वे बहुलक को आँकड़ों का प्रतिनिधि मानने के अपने कारण व्यक्त कर सके।

E5 मान लीजिए कि आपने बाजार में विभिन्न सब्जियों की प्रति किलोग्राम कीमतों के आँकड़े एकत्र कर लिए हैं। मान लीजिए कि 10 में से 3 सब्जियाँ 20 रुपये प्रति किलोग्राम, 4 सब्जियाँ 30 रुपये प्रति किलोग्राम तथा 3 सब्जियाँ 25 रुपये प्रति किलोग्राम है।

क्या हम मान सकते हैं कि 30 रुपये प्रति किलोग्राम एक आम परिवार के लिए सब्जी की कीमत को दर्शाता है?

यदि नहीं तो इसका मतलब है कि बहुलक मान इन आँकड़ों को निरूपित नहीं करता है।

E6 क्या ऐसा इसलिए हो सकता है कि उन्होंने पहले कभी आँकड़ों का समूहीकरण नहीं किया है? शायद उन्हें आँकड़ों को तालिकाबद्ध करने का पहला वाला उदाहरण याद हो जहाँ आँकड़ों का समूहीकरण नहीं किया गया था– प्रत्येक आँकड़ा मान एक स्वतंत्र संख्या थी।

E7 यदि आप कद के आँकड़ों का समूहीकरण समान अन्तरालों में नहीं करेंगे, तो आँकड़े बहुत बिखर जाएँगे। आप अन्य कारण भी सोचें।

E8 अभ्यास में सुझाए गए कार्य बच्चों को देने से पहले उनमें चर्चा करें व बोर्ड पर उन्हें समझा दें कि उन्हें कार्य करने की क्या जरूरत है। बच्चों को छोटी टोलियों में बांटा जा सकता है ताकि वे एक–दूसरे से बातचीत कर सकें और सीख सकें। इससे उन्हें प्राप्त उत्तरों का विश्लेषण करने में भी मदद मिलेगी।

E9 बच्चों से आँकड़े इकट्ठे करके उन्हें वर्गों में बाँट सकते हैं या अलग–अलग भी रख सकते हैं। इसका निर्णय इस बात पर निर्भर करेगा कि आँकड़े कितने हैं। उनसे कहिए कि इनका बहुलक व औसत निकाले और बताए कि क्य ये दो मान लगभग समान है।

यहाँ आपका यह तय करना होगा कि 'लगभग समान' का क्या अर्थ है, यानी कितने छोटे अन्तर को आप 'लगभग समान' मानेंगे। आप इसका निर्णय कैसे करेंगे।

पाठ 15 : संभावना के बारे में सीखना

E1 यदि आपके पास लाल व सफेद गेंद न हो, तो आप चिन्हित व अचिन्हित सिक्कों या अन्य किसी वस्तु का उपयोग कर सकते हैं।

E2 इसके लिए आपको सर्तक रहना होगा कि कहीं आपके अपने पूर्वाग्रह इसमें प्रवेश न कर पाएँ। पूर्वाग्रह इस तरह के हो सकते हैं कि पुरुष स्त्रियों से कम बुद्धिमान होते हैं या सारे रईस लोग दुष्ट होते हैं या किसी जाति–विशेष के लोग ज्यादा अक्लमंद होते हैं आदि।

बच्चों को अपनी परिकल्पना का सत्यापन करने में मदद के लिए आप उनके लिए प्रश्नावली बना सकते हैं या अवलोकन कार्य की रूपरेखा तैयार कर सकते हैं। इनके आधार पर वे पर्याप्त संख्या में उत्तरदाताओं से जानकारी व आँकड़े एकत्र करें। यह आवश्यक है कि प्रश्नावली या अवलोकन कार्य ऐसा हो जिसमें अवलोकनकर्ता वही रिकॉर्ड करे जो वह देखे, न कि उसके बारे में अपनी समझ लिखे। बच्चों के इन आँकड़ों का विश्लेषण छोटी–छोटी टोलियों में कर सकते हैं या पूरी कक्षा की गतिविधि के रूप में भी कर सकते हैं।

E3 अपने लिखे हुए अवलोकन से यह पता कीजिए कि क्या लोग औपचारिक तौर पर किसी तरह से संभावना या भाग्य की 'मात्रा' नापते हैं।

E4 जैसे– पांसे के खेलों में। कई बच्चे तो यह भी कहते हैं कि बैटिंग करते–करते 'आउट' हो जाना भी संभावना की बात है।

E5 जैसे– उनकी यह धारणा हो सकती है कि लड़कों की अपेक्षा लड़कियाँ गणित में ज्यादा अच्छी होती हैं। इससे संबंधित परिकल्पना निम्नानुसार हो सकती है– "कक्षा में एक औसत लड़के की अपेक्षा एक औसत लड़की गणित में बेहतर होती है।"

इसके लिए आँकड़े एकत्रित करने के लिए आप विभिन्न लोगों से उनकी राय पूछें? या आप विभिन्न कक्षाओं के बच्चों के गणित का अंक देखें और निष्कर्ष निकालें।

E6 इस गतिविधि में एक तो वे आँकड़ों का प्रतीकों के रूप में रिकॉर्ड करना सीख रहे हैं। वे यह देखेंगे कि चित के बाद पट आए, यह जरूरी नहीं है। वे शायद यह भी देख पाएं कि उछालों की संख्या बढ़ने के साथ–साथ चित या पट की संख्या (चित या पट आने की संभावना) $\frac{1}{2}$ (50%) के लगभग होने लगती है।

E7 (क) एक तो पैटर्न देख पाने व उसके आधार पर व्यापकीकरण करने की क्षमता। ऐसी ही अन्य क्षमताएँ लिखिए।

(ख) पहले आप उन उद्देश्यों की सूची बना लें जिन्हें इस गतिविधि द्वारा पूरा किया जा सकता है। इसके बाद ऐसी गतिविधियों के बारे में सोचें जिनके जरिए उन उद्देश्यों को भी प्राप्त किया जा सके।

E8 जैसे– कुछ निश्चित (सम्भव, सम्भावित) परिणामों और कुछ अनिश्चित (असम्भव, असम्भावित) परिणामों के बीच भेद कर पाना। बच्चे शायद यह भी देख पाए कि कुछ सामान्य घटनाओं के होने की सम्भावना बराबर होती है। इससे बच्चों को किसी घटना के होने की सम्भावना देख पाने के लिए आँकड़े इकट्ठे करने, छाँटने व तालिकाबद्ध करने में भी मदद मिली।

E10 गतिविधि 3 को आप बच्चों के साथ कीजिए और देखिए कि वे खेल के दौरान क्या करते हैं और इससे क्या सीखते हैं? उनका अवलोकन कीजिए, बातचीत कीजिए और उनसे अपनी बात व्यक्त करने को कहिए।

गतिविधि 4 में देखिए कि गेंद के रंग का अंदाजा लगाने में व बाद में परिणामों को देखने में वे क्या पैटर्न देखते हैं और इससे क्या निष्कर्ष निकालते हैं? इससे आपका यह जानने में मदद मिलेगी कि बच्चों को इस गतिविधि से किस अवधारणा को सीखने या अभ्यास करने में मदद मिलेगी।

क्या बच्चे यह समझ पाएंगे कि निकली जाने वाली गेंद किसी भी रंग की हो सकती है। क्या इसमें वे यह समझ पाते हैं कि यदि दोनों रंग की गेंदों की संख्या बराबर न हो, तो काली गेंद व सफेद गेंद निकलने की संभावना 50-50% $\left(\frac{1}{2}\right)$ नहीं है।

इकाई – 6

संख्याओं का वृहद स्वरूप

पाठ – 15 **ऋणात्मक संख्याएं**

ऋणात्मक संख्या क्या है? – सचिह्न संख्याओं पर संक्रियाए

पाठ – 16 **अंकगणित से बीजगणित की ओर**

बीजगणित क्यों सीखें? – बीजगणित कैसे सीखें? – चर का इस्तेमाल – सारांश

पाठ – 15
ऋणात्मक संख्याएं

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- उद्देश्य
- ऋणात्मक संख्या क्या है?
- संचिह्न संख्याओं पर संक्रियाएँ
- सारांश

परिचय

एक दिन मैं अपने विद्यालय के 20 बच्चों (कक्षा 7 से 10 तक) से बातचीत कर रही थी। मैंने उनसे पूछा कि ऋणात्मक संख्या क्या होती हैं। अधिकतर बच्चों ने कहा था "आपका मतलब पूर्णांक? हां, ये संख्याएं.........आं..........शून्य के उस तरफ वाले बिन्दु होते हैं।" जाहिर है कि उसका इशारा संख्या रेखा पर उनके निरूपण की तरफ था। जब पूछा गया कि इन संख्याओं का उपयोग कहां होता है, तो थोड़ा सोचकर उन्होंने बताया, "लाभ–हानि में।" "कैसे? एक उदाहरण बताओ।" तो वे बता न सके।

आख़िर, बच्चे यह क्यों नहीं समझ पाते कि ऋणात्मक संख्याएं क्या हैं, और उन पर संक्रियाएं कैसे लागू होती हैं? इसका कारण इन्हें सिखाने का बोझिल तरीका हो सकता है कि खुद शिक्षकों को भी यह पता नहीं होता कि इन संख्याओं का उपयोग विज्ञान, व्यापार व गणित में व्यापक रूप से होता है। जैसे–जैसे हमारा समाज टेक्नॉलॉजी में आगे बढ़ रहा है, वैसे–वैसे ऋणात्मक संख्याओं तथा अन्य गणितीय अवधारणाओं को सीखने का महत्व भी बढ़ता जा रहा है। इसलिए बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं व उनकी बुनियादी संक्रियाओं पर समझ होनी चाहिए।

ऐतिहासिक रूप से, गणितज्ञों ने ऋणात्मक संख्याओं की जरूरत तब महसूस की, जब उनका सामना ऐसी परिस्थितियों से हुआ जहां छोटी संख्या में से बड़ी संख्या को घटाना पड़ा, जैसे– $4x+10=2$ समीकरण को हल करने के लिए। यूनानी गणितज्ञ डायोफैण्टस ने ऐसी समीकरणों को 'absurd' (यानी 'बेतुका') कहा क्योंकि इसका हल $x=-2$ ही आ सकता है, जो उनके लिए एक 'बेतुकी' संख्या थी। इन हलों को सार्थक बनाने के लिए उन्हें जरूरी लगा कि ये नई संख्याएं निर्मित करके इन्हें अर्थ दिया जाए। इसमें से ऋणात्मक संख्याएं व उन पर संक्रियाएं उभरीं। ब्रह्मगुप्त ऐसी संख्याओं के इस्तेमाल को दर्ज करने वाले पहले भारतीय गणितज्ञ थे। उन्होंने इन संख्याओं पर संक्रियाएं लागू करने के नियमों को बताया। जब से ऋणात्मक संख्याएं बनी है; तब से लोगों ने धनात्मक व ऋणात्मक संख्याओं के बीच फर्क बताने के लिए किसी चिन्ह के उपयोग की जरूरत महसूस की है। जैसे– प्राचीन लोग

'ऋण 3' को दर्शाने के लिए P3, m.3, $\overline{m}$.3, m3, 3 , 3 आदि प्रतीकों का उपयोग करते थे। आजकल **'ऋण 3'** को दर्शाने का तरीका –3 है। स्पष्ट है कि इसे +3 से अलग दिखाने के लिए किसी न किसी विशेष चिन्ह की जरूरत है। बच्चों को यह बात समझाने हेतु कुछ गतिविधियों को हम इस पाठ में देखेंगे।

उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

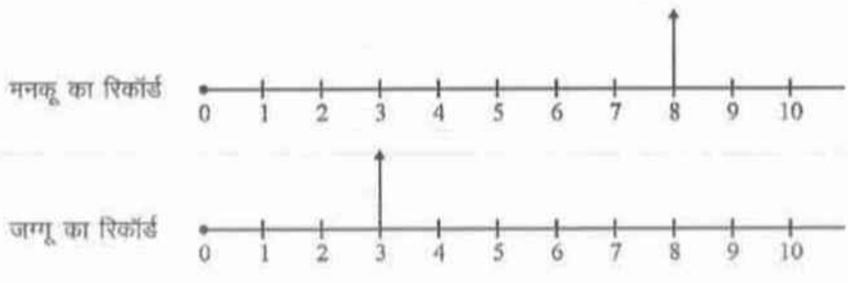
- बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं का अर्थ समझा सकेंगे।
- बच्चों को सचिन्ह संख्यओं के जोड़–बाकी सिखा सकेंगे।
- अपनी शिक्षण विधियों का मूल्यांकन कर सकेंगे।

ऋणात्मक संख्या क्या है?

मेरी एक शिक्षक मित्र को बच्चों को 'ऋणात्मक संख्या' सिखाने में बहुत दिक्कत होती है। वह कहती है, "धनात्मक संख्याएं सिखाने के लिए तो हम ठोस वस्तुओं का इस्तेमाल, बच्चों को अलग–अलग आकार के समूह, जिन्हे वे देख, गिन सकते हैं का इस्तेमाल कर सकते हैं। लेकिन बच्चों को ऋणात्मक संख्याएं कैसे सिखाएं?"

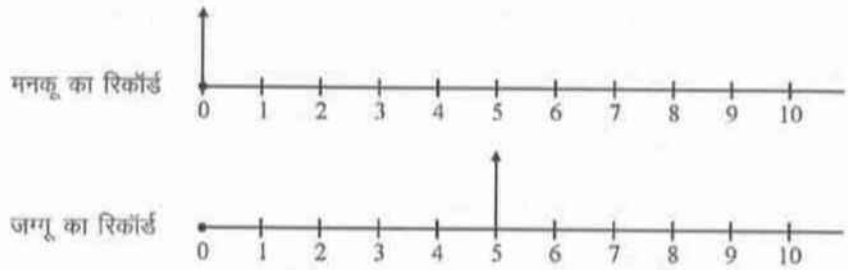
आम पाठ्यपुस्तकें ऋणात्मक संख्या से बच्चों का परिचय कुछ भी भूमिका दिए बिना अमूर्त ढंग से कराती हैं। पूर्ण संख्या प्रणाली में ऋणात्मक संख्याओं को जोड़ने की वजह इनमें यह दी जाती है कि हमें 6 (छोटी संख्या) में से 10 (बड़ी संख्या) को घटाना पड़ता है।इसके बाद ऋणात्मक संख्याओं को धनात्मक संख्या के योज्य विलोम बना देते हैं जैसे– "(–3) वह संख्या है जिसे 3 में जोड़ने पर शून्य आता है।" बच्चों को यह परिचय घोर अमूर्त लगता है, और वे इस अवधारणा को समझ नहीं पाते। फिर ऋणात्मक संख्याओं की चित्रात्मक प्रस्तुति संख्या रेखा पर की जाती है। बच्चों को यह थोड़ा कम अमूर्त लगता है। इसलिए इसे समझना थोड़ा आसान होता है। और फिर हमेशा के लिए ऋणात्मक संख्या उनके लिए सिर्फ संख्या रेखा पर एक बिन्दु बनकर रह जाती है। वे यह नहीं सोच पाते कि इसका अर्थ क्या है? इसलिए बच्चों का सम्पर्क ऐसी स्थितियों सें कराया जाए, जहां ऋणात्मक संख्याओं के उपयोग की जरूरत पड़ती हो। जैसे– लाभ या हानि से संबंधित कहानियां सुना सकते हैं।

कहानी : सतबीर दुकानदार उधार में समान देता था। वह कई बार यह भूल जाता था कि किसने क्या खरीदा था? और कितने में खरीदा था? उसने याद रखने का एक तरीका निकाला। वह हर ग्राहक के खाते के पन्ने पर एक लाइन बना देता। जब भी कोई ग्राहक कोई वस्तु ख़रीदता तो सतबीर उसकी लाइन पर एक निशान लगा देता। इस निशान से उसे पता चला जाता कि उस ग्राहक पर कितना पैसा उधार है। जैसे– मनकू ने 8 रुपये की वस्तु उधार में ली और जग्गू ने 3 रुपए की वस्तु उधार ली। (चित्र 1)



चित्र 1

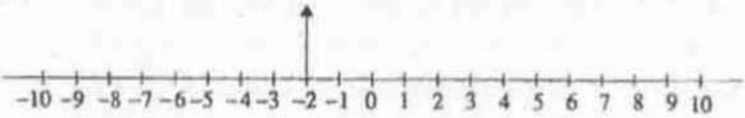
कुछ दिनों बाद मनकू ने अपनी उधारी चुका दी और जग्गू ने 2 रूपए की वस्तु और उधार ले ली। सतबीर ने उनकी लाइनों में परिवर्तन कर दिए। (चित्र 2)



चित्र 2

अगले दिन मनकू ने 3 रुपए की वस्तु खरीदी और सतबीर को पांच रुपए दिए। क्योंकि उसके पास छुट्टे पैसे नहीं थे। तो मनकू ने कहा,"कोई बात नहीं, बाकी के पैसे मै कल ले लूंगा।" अब सतबीर उलझन में पड़ गया। इस बात को रिकॉर्ड में कैसे दिखाए? उसने सोचा, "जब मुझे पैसा लेना होता है, तो मैं शून्य के दाईं ओर निशान लगाता हूं। अब मुझे पैसा देना है, तो निशान कहां लगाऊं?" थोड़ी देर गहराई से सोचकर जग्गू की लाइन को आगे बढ़ाया और उस पर निशान लगा दिया। (आप लाइन को शून्य के बाईं ओर बढ़ाकर बच्चों से पूछ सकते हो कि सतबीर ने निशान कहां लगाया होगा।) उसने फैसला किया कि जो रुपया उसे वापिस करना है, उसे दिखाने के लिए वह शून्य से दो कदम बाईं ओर निशान लगाएगा। (चित्र 3)

मनकू का रिकॉर्ड

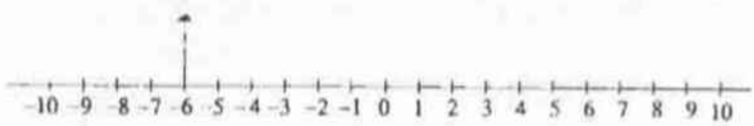


चित्र 3

अब वह मनकू और जग्गू के हिसाब के बारे में यह भी कह सकता था कि उसे मनकू से (−2) रुपये लेने हैं और जग्गू से +5 रुपये लेने हैं। ध्यान दें कि उसने यह याद रखने के लिए कि पैसा लेना देना है, रकम के पहले एक चिन्ह लगाया।

इसके बाद आप बच्चों को इस तरह के सवाल दे सकते है : (चित्र 4) यदि जग्गू का निशान नीचे दिखाए अनुसार हो और वह 3 रुपए की वस्तु खरीदें, तो तीर का निशान कहां लगेगा? अब वह सतबीर को पैसे देगा या उससे पैसे लेगा?

जग्गू का रिकॉर्ड



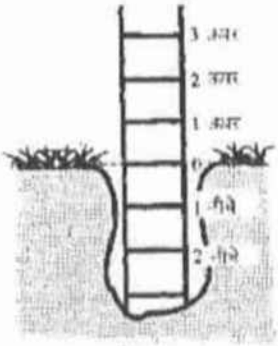
चित्र 4

E1) बच्चों को ऋणात्मक संख्या समझाने के लिए एक और कहानी बनाइए।

ऊपर जैसी कहानियों के माध्यम से बच्चों का परिचय ऋणात्मक संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण से भी हो जाता है।

अन्य तरीका

उदाहरण 1 : जब इंदरजीत से पूछा कि वह ऋणात्मक संख्याओं का जोड़ रोजमर्रा के जीवन में कहां–कहां करती है तो उसने बताया कि सीढ़ियां चढ़ना, लाभ–हानि, अतीत और भविष्य, तापमान नापना, और यहां तक कि परीक्षा के उत्तरों का मूल्यांकन, आदि में।''



चित्र 5

सीढ़ियां चढ़ने में ऋणात्मक संख्याओं के जोड़ के बारे में पूछने पर उन्होंने बताया कि ''वह उन्हें सचिह्न संख्याओं की बात दो विपरीत दिशाओं में गति के रूप में समझाती है– चढ़ना व उतरना। इसके लिए मै गड्ढे में खड़ी किसी सीढ़ी का उदाहरण लेती हूं। धरती का स्तर शून्य है, सीढ़ी की एक पायदान चढ़ना मतलब'1 ऊपर', दो पायदान यानी '2 ऊपर', आदि, है। (चित्र 5) इसी प्रकार से धरती से एक पायदान नीचे (गढ्ढे में) '1 नीचे' है, 2 पायदान नीचे '2 नीचे', आदि, होगा। इसके बाद मैं उन्हें इस तरह के सवाल देती हूं कि 'यदि तुम 2 पायदान ऊपर जाओ और फिर 5 पायदान और ऊपर जाओ तो किस स्थिति में आ जाओगे?', 'यदि तुम 5 पायदान ऊपर जाओ और फिर 5 पायदान नीचे आओ, तो तुम्हारी स्थिति क्या होगी?' और 'यदि तुम 3 पायदान नीचे जाओ तो तुम्हारी स्थिति क्या होगी?' जब बच्चों को ऊपर–नीचे का काफ़ी अभ्यास हो जाता है, तो मैं बस 'ऊपर' शब्द को छोड़ देती हूं और 'नीचे' की जगह '–' चिह्न इस्तेमाल करने लगती हूं। मैं यह स्पष्ट कर देती हूं कि 'नीचे' वाली संख्याओं के साथ '–' चिह्न लगाना जरूरी है ताकि उन्हे 'ऊपर' वाली संख्याओं से अलग पहचाना जा सके।

सीढ़ी के इस मॉडल के जरिए बच्चे यह भी समझ जाते हैं कि –15, –5 के मुकाबले शून्य से ज्यादा दूर है। वे यह भी समझ जाते हैं कि –5 से 3 तक पहुंचने के लिए 8 पायदान ऊपर चढ़ना होता है। यह जरूर है कि मैं उन्हें कई सवाल देती हूं ताकि वे धीरे–धीरे ऋणात्मक संख्याओं के ये गुण समझ जाएं और धनात्मक संख्याओं के साथ इनका संबंध भी देख पाएं। बच्चों के लिए यह आसान नहीं होता कि, –8, शून्य से –7 की तुलना में ज्यादा दूर है। यदि आप छठी कक्षा की किसी बच्ची से पूछें कि –8 और –2 में से बड़ी कौन सी है। तो वह –8 बताएगी। धनात्मक संख्याओं से उसकी जान–पहचान के मद्दे नजर यह जवाब स्वाभाविक है। अतः हमें ऐसे तरीके खोजने होंगे जिनसे यह समझ जाएं कि –2, –8 से बड़ी संख्या है। सीढ़ी इसमें सचमुच मददगार है।''

हमने इन्दरजीत से पूछा कि वह आड़ी संख्या–रेखा वाला तरीका इस्तेमाल क्यों नहीं करती। उसने बताया, ''दाएं–बाएं के मुकाबले ऊपर नीचे वाला प्रस्तुतीकरण बच्चों के लिए समझना ज्यादा आसान होता है। क्योंकि दाएं–बाएं वाला मॉडल समझाते वक्त बच्चे धनात्मक व ऋणात्मक दिशाओं को लेकर चक्कर में पड़ जाते हैं क्योंकि मेरा बाईं ओर जरूरी नही कि उनके लिए भी बाईं ओर हो। लेकिन जब बच्चे खड़ी पट्टी से समझने लगते हैं तो मैं इसे घुमाकर ऐसे रख देती हूं कि वह सामान्य संख्या रेखा जैसी हो जाती हैं तब हम संख्या रेखा पर ऋणात्मक संख्याएं पहचानने का अभ्यास करते हैं ताकि बच्चे इसके साथ सहज हो जाएं।

इसके बाद इन्दरजीत ने अतीत और भविष्य के इस्तेमाल की बात समझाई। उसने हमें बताया, ''इस तरीके में मै आज को समय–रेखा पर '0' से दर्शाती हूं (चित्र 6) आने वाले कल को '1' से, आने वाले 'परसों' को '2' से दर्शाती हूं। फिर मै उनसे पूछती हूं कि 'बीते कल' को कैसे दर्शाएं? थोड़े संकेत व चर्चा के बाद ज्यादातर सभी राजी हो जाते हैं कि इसे 0 से एक चिह्न पहले से दर्शाया जाए। लेकिन फिर, मैं उनसे पूछती हूं कि वे 0 के दाईं ओर वाले तथा बाईं ओर वाले 1 के बीच फर्क कैसे बताएंगे। क्या आने वाले कल और बीते कल के बीच अन्तर दिखाने के लिए कोई निशान जरूरी नहीं हैं? वे थोड़ा सोचने के बाद आम तौर पर इस बात

से सहमत हो जाते है। इस जगह पर मैं –1 का सुझाव देती हूं फिर हम इसे आगे बढ़ाकर परसों के लिए –2 का इस्तेमाल करते हैं, आदि। इस तरह से वे आज को शून्य, अतीत को ऋणात्मक संख्याओं तथा भविष्य को धनात्मक संख्याओं के रूप में देखने लगते हैं।"

चित्र 6

जब इन्दरजीत से उसके द्वारा उपयोग में लाए जाने वाले अन्य तरीके जैसे– कई विकल्पों में से चुनने वाले सवालों के संदर्भ में पूछा गया तो उन्होंने बताया, "जो लोग ऐसे टेस्ट में बैठते हैं वे कई बार किसी सवाल का जवाब नहीं जानते, मगर अन्दाजा लगाने की कोशिश करते हैं। इस तरह की अटकलों से निपटने के लिए, हर गलत उत्तर पर ऋणात्मक अंक दिए जाते हैं, यानी कुछ अंक काटे जाते हैं। जैसे–

हर सही उत्तर के लिए 2 अंक,

सवाल छोडने पर 0 अंक,

हर गलत उत्तर के लिए –1 अंक।

मैं बच्चों को यह समझा देती हूं। फिर मैं कोई एक उदाहरण लेकर उसमें अंको का उतार–चढ़ाव बताती हूं। जैसे– मै उन्हे 10 सवालों वाले इस तरह के टेस्ट में किसी बच्चे का प्रदर्शन दिखाती हूं।

1	✓	6	x
2	x	7	✓
3	उत्तर नहीं लिखा	8	x
4	✓	9	✓
5	✓	10	✓

फिर मैं उन्हें बताती हूं कि ये अंक एक संख्या रेखा पर किस तरह दिखाए जा सकते हैं। मैं उनसे रेखा के 0 के बिन्दु से शुरू करने को कहती हूं। फिर हर सही उत्तर के लिए अंक दाहिनी ओर दो निशान बढ़ते हैं।, गलत उत्तर पर एक कदम बाईं ओर चलते हैं। और यदि किसी सवाल का उत्तर न दिया हो, तो न दाईं ओर बढ़ेंगे न बाईं ओर। तो चूंकि बच्चे ने पहला सवाल सही किया है इसलिए हम दो निशान दाईं ओर चलते हैं दूसरा उत्तर गलत है, इसलिए हम एक कदम बाईं ओर चलेगें, यानी 1 पर पहुंच जाएंगे। तीसरे सवाल में उसे शून्य अंक मिला, इसलिए अंक में कोई बदलाव नहीं होगा। इसके बाद मैं आगे का काम उन पर छोड़ देती हूं। साथ मैं उनसे यह कह देती हूं कि वे हर चरण पर यह साफ–साफ लिखें कि चौथे सवाल, पांचवें सवाल, आदि के बाद बच्चे के अंक कितने थे। मै उनसे यह भी कहती हूं कि हर सवाल के बाद बच्चे के अंकों की स्थिति को रेखा पर निशान लगाकर बताते जाएं। उन्होंने मुझे यह बताना होता है कि आखिर में बच्चे के अंक रेखा के किस बिन्दु पर पहुंचे।"

इस प्रकार इन्दरजीत के साथ इस चर्चा से हमें यह सोचने में मदद मिली कि बच्चों को ऋणात्मक संख्या समझने में मदद किन–किन तरीकों से दी जा सकती है।

E2) ऊपर दी गई चर्चा के अनुसार आप बच्चों को किसी संदर्भ में ऋणात्मक संख्याओं से कैसे परिचित कराएंगे? (ऊपर प्रस्तुत संदर्भों के अलावा)

उदाहरण 1 में बच्चों के सामने ऋणात्मक संख्याएं व उनके गुण प्रस्तुत करने के लिए इन्दरजीत ने किसी ठोस वस्तु का सहारा नहीं लिया। हम जानते हैं कि बच्चे तब सबसे बेहतर सीखते हैं जब ठोस वस्तुओं के साथ गतिविधियां की जाएं।

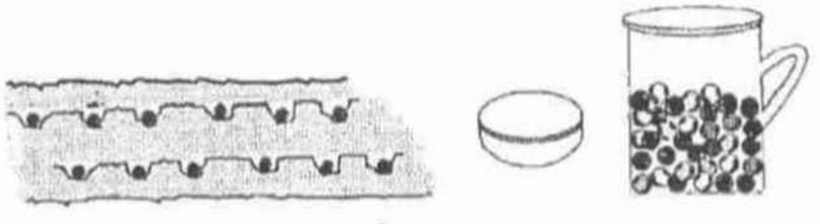
गतिविधि–1

- सोडा बोतलों के 10 एक जैसे ढक्कन ले लीजिए। इन ढक्कनों को सीधा (◎) या उल्टा (◎) रखा जा सकता है। हम सीधे रखे ढक्कनों को +1 और उल्टे रखे ढक्कनों को –1 की कीमत देते हैं। अब हर खिलाड़ी इन ढक्कनों को अच्छे से हिलाकर फेंके। वह (◎◎) जैसी सारी जोड़ियों (यानी +1 व –1) को अलग कर दे। अब वह शेष ढक्कनों को गिन ले। जैसे, यदि 4 जोड़ियां बन गईं और 2 ढक्कन सीधे पड़े हैं तो उसे +2 अंक मिलेंगे। यदि तीन जोड़ियां बनती हैं और 4 ढक्कन उल्टे पड़े हैं तो उसे –4 अंक मिलेंगे। जिस खिलाड़ी को सबसे पहले दस अंक मिल जाएंगे, वह जीतेगा।

इस खेल का सबसे उपयोगी पहलू यह है कि सीधे और उल्टे पडें ढक्कन बच्चों के सामने धनात्मक व ऋणात्मक संख्याओं का सांकेतिक लेकिन ठोस प्रस्तुतीकरण हैं। इस खेल से यह बात भी पुख्ता हो जाती है कि –5 वह संख्या है जो +5 के मान को शून्य कर देती है।

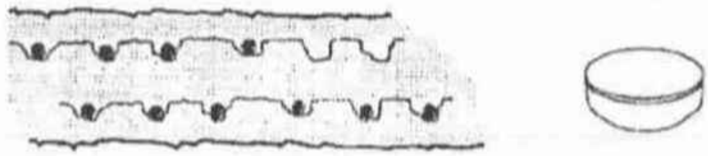
गतिविधि–2

- इस खेल में हर बच्ची जमीन में 12 छोटे गड्ढे बना लेती है, 6–6 गड्ढों की दो कतारों में। साथ में हर बच्ची के पास एक कटोरा होता है (चित्र 6) और हर गड्ढे में एक कंचा है। यह शून्य स्थिति है। साथ ही एक कंचों का भण्डार भी है, जिसमें से सारे बच्चे कंचे ले सकते हैं।



चित्र 7

अब मंजू, पासा फेंकती है और उस पर जो अंक आए, उतने कंचे वह भण्डार में से लेकर अपने कटोरे में रख लेती है। जैसे– पासे पर 3 अंक आए, तो उसके पास 12 गड्ढों में 12 कंचे हैं और 3 कंचे कटोरे में हैं। इस तरह से हर खिलाड़ी एक बार पासा फेंके और भण्डार में से कंचे लेकर अपने कटोरे में रख ले। सबकी एक बारी पूरी हो जाने पर मंजू को फिर से पासा फेंकने का मौका मिलता है। यह 'वापसी' फेंक है, इसमें जो भी अंक आएगा उसे उतने कंचे वापस भण्डार में डालने होंगे यदि 2 अंक आता तो वह अपने कटोरे के 3 कंचों में से 2 वापिस भण्डार में डाल देगी। लेकिन यदि 5 आ गया तो वह क्या करे? 5 कंचे लौटाने के लिए उसे कटोरे के 3 कंचों के अलावा अपने गड्ढों में से भी 2 कंचे निकालने होंगे (चित्र 8)।



चित्र 8 : –2 का ठोस प्रस्तुतीकरण

यानी अब वह शून्य स्थिति की तुलना में 2 कंचे कम पर है अर्थात् शून्य स्थिति पर पहुंचने के लिए उसे 2 कंचे और चाहिए। यानी उसके पास –2 कंचे हैं। अन्य बच्चे भी इस चक्र को इसी तरह खेलेंगे। तीसरा चक्र फिर से 'भण्डार से लेने' का चक्र होगा। इस तरह खेल चलता रहेगा।

यह जरूरी है कि खेल के दौरान बच्चे यह समझाते जाएं कि उन्हें कितने अंक मिले हैं और क्यों? जैसे– मंजू कह सकती है, "मुझे 5 कंचे देने हैं। तो मैं ये (कटोरे वाले) दे देती हूं और 2 गड्ढों में से दे देती हूं। अब मुझे गड्ढों भरने के लिए 2 कंचे चाहिए।" इससे बच्चों को संबंधित अवधारणा समझने में भी मदद मिलेगी और उससे जुड़ी भाषा से भी वे परिचित होते जाएंगे। यह खेल समूहों में भी खेला जा सकता है।

E3) ऊपर के खेलों के माध्यम से ऋणात्मक संख्याओं के कौन से गुण बच्चे बेहतर समझ सकते हैं?

E4) बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं को समझाने के लिए आप पासे के कौन से खेल सोच सकते हैं?

हमने बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं से परिचित कराने के कुछ तरीकों पर विचार किया है। जब उन्हें सचिह्न संख्याओं, यानी ऋणात्मक व धनात्मक दोनों तरह की संख्याओं पर गणितीय संक्रियाएं लागू करनी होती हैं, तो उन्हें फिर दिक्कतों का सामना करना पड़ता है। हम इसमें उनकी मदद कैसे कर सकते हैं?

सचिह्न संख्याओं पर संकियाएं (operations on signed numbers)

कक्षा 8 के एक बच्चे को जब (–2) – (–5) हल करने को कहा गया, तो उसने लिखा –3 जब उससे पूछा गया कि उसने यह उत्तर कैसे निकाला, तो उसने बताया, "तीन ऋण हैं, ऋण ऋण धन होता है, तो एक ऋण बच गया। फिर 5–2 बराबर 3 होता है। तो उत्तर –3 आया।"

ऐसी गलतियां बहुत आम हैं क्योंकि आमतौर पर हम बच्चों को गणितीय संकियाओं को लागू करने की विधि तो बताते हैं मगर यह नहीं समझाते कि ये विधियां काम कैसे करती हैं। यहां हम कुछ ऐसे तरीकों पर विचार करेंगे जिनसे स्थिति को बेहतर बनाने में मदद मिल सकती है। हम यह भी देखेंगे कि पूर्णांकों (integers) का जोड़ करने की विधि बच्चों को कैसे समझाई जाए।

जोड़ना

पूर्ण संख्याओं (whole numbers) को कोई भी जोड़ ठोस वस्तुओं के आधार पर कर सकते हैं। लेकिन ऋणात्मक संख्याओं को जोड़ते वक्त ऐसा कोई स्वाभाविक संदर्भ उपलब्ध नहीं होता। क्या हम पहले बताई गई गतिविधियों में फेरबदल करके उनका इस्तेमाल पूर्णांकों का जोड़ समझाने में कर सकते हैं?

उदाहरण 2 : 12 वर्षीय मीना को ऋणात्मक संख्याएं समझ नहीं आ रही हैं। एक शिक्षक ने बोतल के ढक्कन वाली गतिविधि करवाई। इससे मीना को यह समझ आ गया कि +1 और –1 एक–दूसरे को रद्द कर देते हैं। तथा इसे लिखित रूप (+1) + (–1) = 0 को भी मान लिया। फिर उससे पूछा कि (+2) + (–2) कितना होगा, उसने बोतल के ढक्कनों का उपयोग करके उत्तर निकाल लिया, शून्य। (+3) + (–3) = 0. इस प्रकार से वह धीरे–धीरे समझ गई कि **"किसी भी धनात्मक संख्या n के लिए (+n) + (–n) = 0 होता है।"**

इसी तरह से शिक्षक ने उसे यह भी समझने में मदद की कि (-n) + (+n)=0 होता है।

अब उन्होंने (-3)+(-2) जैसे सवाल पर जाने का फैसला किया। वह इसे नहीं कर पाई। उन्होंने उससे कहा कि ढक्कनों से –3 दर्शाए। उसने दर्शा दिए। "अब दूसरे ढक्कनों से –2 दिखाओ", उसने कर दिया।

"शाबाश! अब इनको मिला दो। कितना आया?" उसने उन्हें मिला दिया और कहा कि 5 आए।

"पक्की बात है? जरा देख लो ढक्कनों के मुंह किस तरफ हैं।" शिक्षक ने उसे याद दिलाया।

"ओह, हां, –5" अपनी गलती पहचानते हुए मीना बोली। और उसे गणितीय प्रतीकों में लिख लिया।

(-3) + (-2) = -5

उन्होंने इसी तरह के कुछ और उदाहरण किए। वे उससे साथ–साथ हल लिखने को कहती गईं। फिर धीरे–धीरे एक सूची सी बन गई :

(-3) + (-2) = -5

(-1) + (-3) = -4

(-2) + (-3) = -5

: : :

: : :

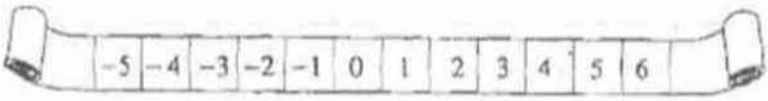
इस सूची को देखकर व थोड़ी मदद के बाद, वह एक पैटर्न पहचानने लगी। इस पैटर्न के आधार पर वह ऋणात्मक संख्याओं के जोड़ के नियम तक पहुंच गई– "पहले मैं सिर्फ संख्याओं को जोड़ लेती हूं और फिर जोड़ के पहले ऋण चिन्ह लगा देती हूं।" शिक्षक ने उससे कहा कि वह अपनी बात एक उदाहरण से समझाए। तो मीना ने उन्हें बताया कि (-10) + (-5) का उत्तर निकालने के लिए वह पहले 10 और 5 को जोड़कर 15 प्राप्त कर लेगी और फिर इसके सामने ऋण चिह्न लगाएगी तो उत्तर –15 मिल जाएगा।

इस तरह से वह खुद ही उस नियम तक पहुंच गई जिसे बीजगणित में हम यों लिखते हैं :

(-m) +0 (-n) = – (m + n) जहां m व n धनात्मक संख्याएं हैं।

थोड़े दिन बाद शिक्षक ने मीना के साथ इस गतिविधि को दोहराया। और फिर उससे कहा कि ढक्कन का उपयेाग किए बगैर ऋणात्मक संख्याओं का जोड़ करे। उसने कर दिया।

अब शिक्षक ने संख्या–रेखा के इस्तेमाल का फैसला किया। शिक्षक ने इसे एक ऐसी संख्या–पट्टी का रूप दे दिया जिस पर –50 से +50 तक के पूर्णांक लिखे थे (चित्र 9) मीना धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं को बोतल के ढक्कनों से दर्शाने में दक्ष हो चुकी थी। अतः उन्होंने इसे पट्टी पर अंकित संख्याओं से जोड़ने की कोशिश की।



चित्र 9

इसके लिए उन्होंने मीना को एक बटन दे दिया और उसे समझाया कि जब वे तीन ढक्कन के मुंह नीचे करके रखें, यानी संख्या +3 हो, तो वह बटन को पट्टी के 3 पर, यानी 0 से तीन स्थान दाईं ओर रखे। और फिर यदि उसे 4 और ऐसे ढक्कन दे दिए जाएं, तो उसके पास कुल कितने हो जाएंगे? "तब तुम बटन को कहां रखोगे?" उसने कहा, "7 पर"। "यानी तुम चार स्थान और दाईं ओर जाओगे, है न?"

इसी प्रकार से (-2) + (-3) का हल पाने के लिए उसे उन्होंने यह समझने में मदद दी कि (–2) से तीन स्थान बाईं ओर चलना होगा, यानी –5 पर जाना होगा। इस प्रकार के कुछ और उदाहरणों की मदद से उन्होंने उसका ध्यान इस बात पर दिलाया कि जब वह धनात्मक संख्याएं जोड़ता है तो दाईं ओर बढ़ता है तथा ऋणात्मक संख्याएं जोड़ते वक्त बाईं ओर बढ़ना होता है।

"अब ज़रा पट्टी का उपयोग करके बताओ कि 2 + (–2) कितना होगा?" शिक्षक ने पूछा। उसे पता था कि पहले 2 का मतलब यह है कि उसे बटन को शून्य से दो स्थान दाईं ओर ले जाना पड़ेगा। यह तो उसने कर लिया। मगर फिर थोड़ा ठिठक गई। शिक्षक ने कहा, "अच्छा, पट्टी के बगैर बताओ कि 2 + (–2) कितना होगा।" उसने बेहिचक जवाब दिया 'शून्य'।"शाबाश! तो तुम इस वक्त जहां हो, वहां से शून्य पर पहुंचने के लिए क्या करना होगा?" "दो कदम पीछे चलना पड़ेगा," उसने कहा। इस पर शिक्षक ने कहा, "सही। –2 का यही तो मतलब होता है। –2 के लिए तुम्हें 2 स्थान बाईं ओर चलना पड़ता है ?" इस तरह से धीरे–धीरे वे उसे यह समझने में मदद कर पाईं कि, जैसे– 2 + (–3) = –1 होता है। शिक्षक कई दिनों तक यह गतिविधि बीच–बीच में तब एक दोहराती रहीं जब तक कि उन्हें यकीन न हो गया कि वह सचिह्न संख्याओं को जोड़ना सीख चुकी है।

E5) किसी धनात्मक व किसी ऋणात्मक संख्या का जोड़ सीखने में बच्चों की मदद करने की दृष्टि से माचिस का ढक्कन व अन्दर की डिबिया का इस्तेमाल करते हुए एक गतिविधि तैयार कीजिए।

E6) एक ऐसा खेल तैयार कीजिए जिसे खेलते हुए बच्चे सचिह्न संख्याओं को जोड़ने का अभ्यास कर सकें। इस खेल को खेलते हुए वे सचिह्न संख्याओं के कौन से गुण सीखेंगे? कुछ 11 वर्षीय बच्चों के साथ इस खेल को आजमाइए और देखिए कि क्या इससे आपके शिक्षण उद्देश्य की प्राप्ति होती है।

घटाना

ऋणात्मक संख्याओं को घटाते वक्त बच्चे निम्नलिखित क़िस्म की गलतियां करते हैं :

(i) 19 – (–11) = 8, (ii) 19 – (–11) = – 8,

(iii) –19 – 11 = 30, (iv) –11 – (–19) = – 8

बच्चे ऐसी गलतियां क्यों करते हैं? (i) गलती की वजह है कि बच्ची ने ऋणात्मक संख्या के सामने लगे चिह्न को अनदेखा कर दिया। लेकिन सबसे बड़ी वजह है कि बच्ची ने सचिह्न संख्याओं को घटाने की प्रक्रिया ही नहीं समझी है। इसी को सुधारने की जरूरत है। सबसे पहले देखते हैं कि सचिह्न संख्याओं को घटाने की प्रकिया को सीखने में निम्न चरण शामिल हैं–

(a) प्राकृतिक संख्या को घटाना (जैसे, 4 – 10, 10 – 4 या –10 – 4),

(b) –(-n) = n, जहां n कोई धनात्मक संख्या है (जैसे –(–5) = 5),

(c) ऋणात्मक संख्या को घटाना (जैसे 5–(–6) या –5–(–6).

पहला चरण समझने में तो उन्हें संख्या–रेखा से मदद मिल सकती है। यदि वे यह समझ सकें कि 4 घटाने का मतलब होता है कि हम लाइन पर जहां भी हों वहां से 4 कदम बाईं ओर चलें, तो वे यह समझ पाएंगे कि पहली किस्म का घटाना कैसे होता है।

चरण (b) व (c) को समझाने हेतु एक उदाहरण :

उदाहरण : मेरी ऋणात्मक संख्याएं सिखाने की शुरूआत ठोस वस्तुओं से करती है। फिर एक निश्चित मोड़ पर वह बच्चों को संख्याओं से संबंधित अवधारणाएं या प्रक्रियाएं सीखने में मदद देने के लिए, संख्या–रेखा/पट्टी का इस्तेमाल शुरू करती है। जैसे– बच्चों को यह समझाने के लिए कि -(-n) = n, होता है, वह ऊपर–नीचे वाला मॉडल इस्तेमाल करती है (चित्र 5)। जैसे– वह उनसे पूछती है कि, 4 ऊपर का उल्टा क्या होगा?

वे जवाब देते हैं, "4 नीचे।"

"और '4 नीचे' का उल्टा?"

"4 ऊपर।"

"तो यदि हम '4 ऊपर' को 4 लिखें और '4 नीचे' को –4 लिखें, तो 4 का उल्टा क्या होगा?" बच्चे आम तौर पर बता देते हैं, –4.

फिर वह कई धनात्मक संख्याओं का उल्टा पूछती है और बच्चों के उत्तरों को निम्नानुसार कॉलम में लिखती जाती है :

10 का उल्टा –10

3 का उल्टा –3

5 का उल्टा –5, आदि।

इस सूची के आधार पर वह बच्चों से किसी संख्या का उल्टा प्राप्त करने का नियम निकालने को कहती हैं। थोड़ी बातचीत के बाद वे आमतौर पर इस निष्कर्ष पर पहुंच जाते हैं कि किसी संख्या का उल्टा पता लगाने के लिए उसके पहले ऋण चिह्न लगा देते हैं।

अब वह इसी नियम को आगे बढ़ाकर ऋणात्मक संख्याओं पर लागू करती है– "तो –5 का उल्टा क्या होगा?" एक बार फिर कक्षा में थोड़ी चर्चा होती है और बच्चे इस आम सहमति पर पहुंचते हैं कि –5 का उल्टा –(–5) होगा। वह इस बात को ब्लैकबोर्ड पर लिख देती है। फिर वह उन्हें याद दिलाती है, "–5 यानी '5 नीचे' होता है। तो उसका उल्टा कितना होगा? वे कहते हैं, "5 ऊपर।" फिर वह पूछती है, "हम इसे 5 भी लिखते हैं, है ना?" इस तरह से, कई उदाहरण करने के बाद वे समझ जाते हैं और मान लेते हैं कि –(–5) = 5, –(–.2) = 2, वगैरह। अब वह इस बात का इस्तेमाल बच्चों को यह समझने में मदद देने के लिए करती है कि जब हम ऋणात्मक संख्याओं को घटाते हैं, तो क्या होता है। वह बच्चों से पूछती है, "जब –(–.5) = 5, होता है, तो 7 – (–5) कितना होगा?" वह पाती है कि बच्चे अक्सर संबंध को पहचान लेते हैं और उत्तर 12 निकाल लेते हैं। पहले सीखी गई बात, यानी -(-n) = n, का इस्तेमाल करके बच्चे –5– (-7) जैसे सवाल करना भी सीख जाते हैं।

हर चरण पर मैरी बच्चों को खुद से करने के लिए कई उदाहरण और अभ्यास देती है। उसका अनुभव है कि काफी अभ्यास करने के बाद बच्चों को संख्या–रेखा का सहारा नहीं लेना पड़ता। वे घटाने का सामान्य नियम समझ जाते हैं और संक्रिया को आसानी से करने लगते हैं।

E7) बच्चों को सचिह्न संख्याओं का घटाना सिखाने के लिए समय–रेखा (चित्र 6) का उपयोग करते हुए एक गतिविधि बनाइए। यह भी बताइए कि आप किन चरणों के जरिए नियम तक उनको पहुँचाएंगे?

सारांश

इस पाठ में हमने निम्नलिखित मुद्दों पर चर्चा की :

1) कुछ ऐसे कारण जिनकी वजह से बच्चों को यह समझने में कठिनाई होती है कि ऋणात्मक संख्या क्या होती है।

2) बच्चों को सचिह्न संख्याओं का अर्थ व उनके गुण समझाने के कुछ तरीके जो ऐसी संख्याओं को ठोस वस्तुओं के रूप में या चित्रों के रूप में प्रदर्शित करने पर आधारित हैं।

3) ऐसी कई गतिविधियां, जिनकी मदद से बच्चे सचिह्न संख्याओं को जोड़ना व घटाना सीख जाएं।

पाठ – 16
अंकगणित से बीजगणित की ओर

पाठ की रूपरेखा
- परिचय
- उद्देश्य
- बीजगणित क्यों सीखें?
- बीजगणित कैसे सीखें?
- चर का इस्तेमाल
- सारांश

परिचय

पिछले कुछ हफ्तों में हम अपने आस–पड़ोस के लोगों से मिले। यह समझने के लिए कि बीजगणित को लेकर उनका क्या रवैया है। हमने पाया कि अधिकांश स्कूली बच्चे गणित में बीजगणित से घबराते हैं। बातचीत के दौरान बहुत से मां–बाप ने यह स्वीकार किया कि जब वे स्कूल में थे, तब बीजगणित में कमजोर थे। जब उनसे इसका कारण पूछा गया तो अधिकांश ने बताया कि बीजगणित करने के लिए काफी जटिल व कठिन सूत्रों का इस्तेमाल करना पड़ता था और इन्हें याद रखना मुश्किल है। कई लोगों को यह लगता है कि इसका कोई उपयोग नहीं है।

बीजगणित को लेकर लोगों के ऐसे रवैये व इस स्थिति को बेहतर बनाने के तरीकों को हम इस पाठ में देखेंगे। हम बीजगणित पढ़ाने के ऐसे कुछ तरीकों पर विचार करेंगे जिनसे बच्चों को बीजगणित प्रिय लगे।

बीजगणित से बच्चों की पहली मुलाकात 'व्यापकीकृत अंकगणित' के रूप में होती है। व्यापकीकरण का अर्थ तथा कौन से व्यापकीकरण स्वीकार योग्य होते हैं, इसे हम पाठ में पढ़ेंगे व चर की अवधारणा पर बात करेंगे। बीजगणित की भाषा सीखने व इस्तेमाल करने के लिए गह अवधारणा जरूरी है कि बच्चे चर की अवधारणा तथा इसका उपयोग न समझने की वजह से जो आम गलतियां करते हैं उन्हें समझें।

इसके पश्चात् हम बच्चों से चरों (variables) का उपयोग किस तरह से करने की अपेक्षा करते है, जिससे वे सूत्रों को लागू करते व समीकरण सुलझाते वक्त इसका उपयोग कर सके। चरों का इस्तेमाल करते वक्त बच्ची मशीनी ढंग से कुछ नियमों को लागू करती है। वह यह नहीं समझ पाती कि इसमें कौन सी बीजगणित शामिल है। इसके लिए कुछ ऐसे तरीके सुझाए हैं जिनसे स्थिति को सुधारने में मदद मिले। बीजगणित ही नहीं, बल्कि पूरा गणित ही व्यापकीकरण से बना है। इसके कुछ पहलुओं पर चर्चा करेंगे।

उद्देश्य–

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- यह बता पाएंगे कि बीजगणित सीखते वक्त बच्चे कौन से कौशल विकसित करते हैं।
- ऐसे तरीके सुझा पाएंगे जिनसे कक्षा 6 व उससे बड़ी कक्षा के बच्चे अंकगणितीय सिद्धांतों का व्यापकीकरण करना सीख सकें।
- चरों से निपटते वक्त बच्चों द्वारा की जाने वाली आम गलतियों को पहचान पाएंगे।
- बच्चों को चर की अवधारणा सिखाने के तरीके सुझा पाएंगे।
- बच्चों को चरों का इस्तेमाल करने में मदद देने के तरीकों का वर्णन कर पाएंगे।
- अपनी शिक्षण विधि के असर का आकलन कर पाएंगे।

बीजगणित क्यों सीखें?

बीजगणित से बच्चों का पहला सम्पर्क 'व्यापकीकृत अंकगणित' यानी जब वे अंकगणितीय पैटर्न, नियम और सम्बन्धों का अध्ययन करते हैं, उन्हें समझने की कोशिश करते हैं, उनका व्यापकीकरण करने की कोशिश करते हैं और उन्हें शब्दों व प्रतीकों का उपयोग करते हुए सटीक ढंग से व्यक्त करते हैं।

उदाहरण : जब हम विभिन्न संख्याओं को 10 से गुणा करते हैं जैसे–

$10 \times 1 = 10$

$10 \times 3 = 30$

$10 \times 7 = 70$

$10 \times 12 = 120$

$10 \times 26 = 260$

$10 \times 365 = 3650$

$10 \times 270 = 2700$

तो गुणनफल में एक पैटर्न नजर आता है। इस पैटर्न के आधार पर हम 10 से गुणा करने की प्रक्रिया के संबंध में एक व्यापक नियम बना सकते हैं जो कि इस प्रकार है–

"किसी भी संख्या का 10 से गुणज प्राप्त करने के लिए उस संख्या के प्रत्येक अंक को एक स्थान बाई ओर खिसकाकर इकाई के स्थान पर शून्य लिख देंगे।" इस प्रकार विशिष्ट उदाहरणों से व्यापकीकरण तथा व्यापक संबंधों से विशिष्टीकरण करने की क्षमता गणितीय सोच का जरूरी हिस्सा है। यह मानसिक क्षमता सिर्फ गणित तक ही सीमित नहीं है बल्कि हमें इसकी जरूरत रोजमर्रा के जीवन में बार–बार पड़ती है। जैसे जब हम पशु, नीला, लड़की, गोल की अवधारणाओं की समझ बनाते हैं। इसी तरह अपने रोजमर्रा के अनुभवों से व्यापकीकरण करने की अपनी क्षमता की ही बदौलत हम उम्मीद करते हैं कि रोजाना सूरज पूर्व में चढ़ेगा और पश्चिम में डूबेगा, या हम मानते हैं कि इंसान नश्वर है।

यहां आम भाषा और गणित में 'व्यापक' के इस्तेमाल में क्या फर्क है? जब हम हिन्दी में इसका इस्तेमाल करते हैं तो हमारा मतलब 'आमतौर पर' होता है, न कि 'हर बार'। जैसे– 'केरल में मानसून व्यापक रूप से मई के अन्त में आता है' हांलांकि ऐसा हर वर्ष नहीं होता। लेकिन जब हम गणित में 'व्यापक' का इस्तेमाल करते हैं, तो हमारा मतलब होता है कि वह कथन जिरा पर इरो लागू किया गया है, उन राभी रिथतियों के लिए रात्य होगा जो कथन में दी गई शर्तों को पूरा करते हों। जैसे– यदि किसी पूर्णांक का सबसे दायां वाला अंक 5 हो, तो वह पूर्णांक 5 का गुणज होगा। 'गणितीय तौर से यह स्वीकार योग्य कथन है क्योंकि यह उन सभी पूर्णांकों के लिए राही है जिनका सबसे दायां बाला अंक 5 हो। लेकिन यह कथन कि 'व्यापकतः अभाज्य संख्याएं विषम संख्याएं होती हैं।' गणितीय तौर से स्वीकार योग्य न होगा हालांकि यह एक स्थिति को छोड़ (संख्या 2 को) बाकी सभी अभाज्य संख्याओं के लिए सही है। इसी प्रकार से यह व्यापकीकरण भी स्वीकार योग्य नहीं है कि सभी विषम संख्याएं अभाज्य होती हैं। जैसे 9 एक विषम संख्या है जो कि अभाज्य नहीं है।

इस कारण हमें कोई भी गणितीय व्यापकीकरण करते वक्त बहुत रातर्क रहना होगा कि यदि एक भी स्थिति ऐसी मिले जिसके लिए यह व्यापीकरण सही नहीं है, तो हमें इस व्यापकीकरण को छोड़ देना होगा।

E1) अपने रोजमर्रा के जीवन में दिखने वाले व्यापक नियमों के तीन उदाहरण दीजिए। इनमें से कौन–कौन से नियम गणितीय तर्क की दृष्टि से स्वीकार योग्य होंगे?

बच्चे बीजगणित सीखने के दौरान बहुत रो कौशल सीखते हैं। जैसे–जैसे बच्चों को आम जीवन और गणित में व्यापकीकरण के ज्यादा से ज्यादा अवसर मिलते जाते हैं, वैसे–वैसे वे कई क्षमताएं विकसित करते जाते हैं। जैसे – वे किसी समूह के सदस्यों के सामान्य गुणों को ढूंढना सीख जाते हैं। वे गणित तथा अन्य क्षेत्रों में व्यापक पैटर्न और संबंध खोजना सीखते हैं। इससे उनमें अमूर्तता से निपटने की क्षमता विकसित होती है। वे सिर्फ एक सदस्य के बारे में न सोचकर समूचे समूह के बारे में सोचना और बीजगणित की भाषा का इस्तेमाल करते हुए उन्हें अपने सोच तथा नियमों व संबंधों को व्यक्त करने में ज्यादा तार्किक, स्पष्ट व सही होने में मदद मिलती है।

बीजगणित सीखने की खास वजह को समझने के लिए निम्नलिखित सवालों/पहेलियों को देखे–

1. एक संख्या व उसका आधा जोड़ने पर 63 मिलता है। वह संख्या क्या है?
2. एक पिता अपने बेटे से 30 साल बड़ा है। 10 साल पहले पिता की उम्र बेटे से 4 गुणा थी। इस वक्त पिता की उम्र क्या है?
3. 5 चाय और 4 वड़ों की कीमत 18.50 रुपए है। लेकिन 4 चाय और 5 वड़ों की कीमत 17.50 रुपए होती है। एक चाय की कीमत क्या होगी?
4. जब कॉफी की कीमत 20 प्रतिशत बढ़ी तो एक व्यक्ति ने अपनी कॉफी का इस्तेमाल 20 प्रतिशत कम कर दिया। उसका खर्चा बढ़ेगा या घटेगा और कितने प्रतिशत?
5. दो संख्याओं का जोड़ 100 है तथा उनका गुणनफल 2499 है। वे दो संख्याएं कौन सी हैं?
6. एक कार 40 किमी. प्रति घण्टे की रफ्तार से पहाड़ी पर चढ़ती है और तुरंत बगैर रूके 60 किमी. प्रति घण्टे की रफ्तार से उतर जाती है। कार की औसत रफ्तार क्या होगी?

इन सवालों को कैसे हल करें? क्या हम इन्हें परीक्षण यानी जांच व भूल सुधार के तरीके से हल कर सकते हैं? मतलब हम कोई एक संख्या मान लें और फिर उनके अनुसार सवाल को हल करने की कोशिश करें। आइए देखें कि इस तरीके से हम पहला सवाल हल कर सकते हैं अथवा नहीं।

मान लीजिए कि वह संख्या 100 है। सवाल में दी गई जानकारी के मुताबिक 100 और उसका आधा जोड़ने पर 63 आना चाहिए। मगर ऐसा है नहीं। यानी 100 वह संख्या नहीं हो सकती। चलिए अन्य संख्याएं आजमाते हैं। नीचे तालिका में हमने यही किया है। अलग अलग संख्याएं लेकर उनकी जोड़ को सामने लिख दिया है।

मानी गई संख्या	उस संख्या का आधा	जोड़
100	50	150
40	20	60
50	25	75
60	30	90

इनमें से कोई भी संख्या वांछित उत्तर नहीं दे रही है। पता नहीं हमें कितनी संख्याओं को आजमाना होगा, तब जाकर शायद हमें उत्तर मिल जाए।

इसकी बजाए हम एक व्यापक संख्या लें, उसे x कहें और इसके आधार पर आगे बढ़ें? हमें पता है कि x और x के आधे का जोड़ 63 है, यानी $x+\frac{1}{2}x=63$

यानी $\left(\frac{3}{2}\right)x=63$

यानी $x=63\times\frac{2}{3}$ $\left(\frac{3}{2}x\times\frac{2}{3}=63\times\frac{2}{3}\right)$

यानी $x=42$

एक के बाद एक विशिष्ट संख्याएं लेने की बजाय एक व्यापक संख्या x को लेकर हमें कितनी आसानी से उत्तर मिल गया! यह एक उदाहरण है जो यह दिखाता है कि पेचीदा नजर आने वाले सवालों को बीजगणित के इस्तेमाल से बड़ी आसानी से हल किया जा सकता है।

बीजगणित सीखने का एक और कारण है आनन्द। गणित के कई खेलों व पहेलियों का हल बीजगणित में है। जैसे– संख्या सोचने के इस खेल को देखिए :

दो अंको की कोई भी संख्या सोच लें। अंको की अदला–बदली करें। नई संख्या को पहली वाली संख्या में जोड़ और योगफल में पहली संख्या के अंको के जोड़ से भाग दे। आपका उत्तर 11 आएगा!

E2) आप ऊपर दिए गए 6 सवालों मे से दूसरे को कैसे हल करेंगे? आप इसे बीजगणित के इस्तेमाल से कैसे हल करेंगे? कौन सी विधि ज्यादा सरल हैं?

E3) अंकगणित का व्यापकीकरण करने की क्षमता सीखने के अन्य कारण सोचकर बताइए।

अब शायद सहमत होगें कि बच्चों को बीजगणित सीखने की जरूरत है तथा वे इसे एक ऐसी प्रक्रिया के जरिए सीखें जिसमें उन्हे आनन्द आए और उनकी रूचि बनी रहे। लेकिन जिस ढंग से हम उन्हे बीजगणित सिखाते हैं, उसका नतीजा यह होता है कि बच्चों में अरूचि पैदा हो जाती है और वे कई मुश्किलों का सामना करते हैं। आइए इन मुश्किलों व उनसे निपटने के कुछ तरीकों पर बातचीत करें।

बीजगणित कैसे सीखें?

पिछले भाग में आपने देखा कि बीजगणित से बच्चों का पहला सम्पर्क व्यापकीकृत अंक गणित के रूप में होता है। आप यह तो मानेंगे कि इस सम्पर्क की तैयारी में उन्हे पैटर्न पहचानने तथा अपने द्वारा खोजी गई बात को स्पष्ट रूप में प्रस्तुत करने की क्षमता विकसित करनी होगी। इसके लिए जरूरी है कि जब से बच्चे संख्या सीखना शुरू करें, तब से ही उन्हे संख्या से जुड़े पैटर्न व संबंध पहचानने तथा उपयोग करने के कई सारे अवसर दिए जाएं। हमें उनकी मदद करनी चाहिए कि वे इन पैटर्नों के आधार पर व्यापीकरण करने की क्षमता विकसित कर पाएं। जैसे– जब वे जोड़ना सीख रहें हों, तब उन्हे व्यापक बात खोजने को प्रेरित किया जा सकता है कि जोड़ एक क्रमविनिमेय संक्रिया है जबकि घटाना नहीं है। या जब बच्चे गुणा करना सीख रहें हों, तब उन्हे 10 से गुणा का नियम निकालने में मदद दी जा सकती है।

हां, यह जरूर है कि कभी कभी बच्चे गलत व्यापकीकरण भी कर लेते हैं, जैसे 'गुणा करने पर संख्या बढ़ती है'। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि उन्होने यह बात धनात्मक संख्याओं के संदर्भ में देखी होती है। (जैसे 2 X 3 = 2, 3 से ज्यादा होता है)। लेकिन आप उनसे पूछ सकते हैं कि क्या यह बात हमेशा सही होती है। आप उनसे विभिन्न स्थितियों में इस बात की जांच करवा सकते हैं। उनसे पूछिए कि यदि गुणा में एक संख्या शून्य हो तो क्या होता है जब वे यह देख लें कि उनका व्यापकीकरण इस मामले में सही नहीं है, तो उन्हे इसे बदलना सीखना होगा। शायद उनका बदला हुआ व्यापकीकरण, 'किन्ही भी दो शून्येतर (जो शून्य नहीं हैं) संख्याओं का गुणा करने पर उन दोनों से बड़ी संख्या आती है, हो। तब आप उनसे जांचने को कह सकते हैं कि उनका व्यापकीकरण $\frac{1}{2}$ जैसी किसी भिन्न संख्या पर लागू होता है या नहीं। इसी प्रकार सीखने की यह प्रक्रिया आगे चल सकती है।

इस तरह हम बच्चों को यह सीखने में मदद कर सकते है कि व्यापकीकरण करते हुए सावधानी रखने की जरूरत होती है तथा कोई व्यापकीकरण सही न होने पर उसे बदलना/छोड़ना भी पड़ सकता है।

E4) बच्चों द्वारा किए जाने वाले किसी गलत गणितीय व्यापकीकरण का उदाहरण दीजिए। आप उन्हे यह समझने में कैसे मदद करेंगे कि यह गलत है?

बीजगणित का विकास पैटर्न, संबंधों तथा व्यापकीकरण की तलाश में से होता है। जो चर की अवधारणा हमें व्यापक संबंधों का अध्ययन करने में मदद देती है। यह कोई अक्षर (जैसे a, b, x, y क, ख) होता है जो एक या ज्यादा संख्याओं को दर्शाता है। इसका अर्थ यह है कि कुछ स्थितियों में यह अक्षर सिर्फ एक संख्या को दर्शाता है। (जैसे कि E2 में था) और कभी–कभी यह कई संख्याओं को दर्शाता है (जैसे, यदि $x + 1$, 9 से कम है तो x, 8 से कम कोई भी संख्या हो सकती है)। यानी इसके कई अलग अलग मान हो सकते हैं इसलिए इसे चर कहा जाता है।

'चर' की समझ विकसित करना, बीजगणित की समझ विकसित करने के लिए निहायत जरूरी है और यहीं बच्चे सबसे बड़ी बाधा महसूस करते हैं। 'मान लीजिए x कोई भी संख्या है' जैसे कथन समझना बच्चे के लिए बहुत ही कठिन होता है। कक्षा 4 व 5 की कई पाठ्यपुस्तकें '2+3 = 3+2, 4+5 = 5+4' जैसे विशिष्ट उदाहरणों से छलांग लगाकर " a + b : b + a, जहां a और b कोई भी दो संख्याएं है", जैसे कथनों पर पहुंच जाती हैं और बच्ची इन्हे स्वीकार नहीं कर पाती। वह या तो इसे अनदेखा कर देती है या अक्षरो के ऐसे इस्तेमाल को समझने से उसका दिमाग इनकार कर देता है। इसलिए जब बच्चों का परिचय चर से कराया जाता है, तो

यह कोई हैरानी की बात नहीं है कि वे इसे समझ नहीं पाते। नतीजा यह होता है कि बीजगणित सीखना शुरू करने से लेकर उससे छुटाकरा पाने तक बच्चे कई गलतफहमियाँ पालते जाते हैं। इनकी वजह से निम्नलिखित जैसी स्थितियां सामने आती हैं–

i) बच्ची यह नहीं समझती कि अक्षर किसी संख्या को दर्शाता है इसलिए वह इसे अनदेखा कर देती है। जैसे– वह कहेगी कि $3x + 4 = 7$ होता है।

ii) बच्ची समझती है कि यह अक्षर कुछ वस्तुओं को दर्शाता है। जैसे जब 11 वर्षीय रश्मि से पूछा गया कि 7p में p क्या है, तो उसका जवाब था कि यह कुछ भी हो सकता है – सेब, पेंसिल, किताबें।

iii) बच्ची सोचती है कि यह अक्षर उन वस्तुओं को दर्शाता है जिनके नाम इस अक्षर से शुरू होते है। जैसे– अमर ने कहा कि 3a में a सिर्फ apple या alligator को दर्शा सकता है, banana को नही "क्योंकि तब तो यह 3b होगा।"

इस धारणा का कारण यह हो सकता है कि बच्चे इकाइयों के लिए लघु रूपों का इस्तेमाल करते रहे हैं (जैसे 3 मीटर के लिए 3 मी.)

iv) बच्ची सोचती है कि अक्षर किसी खास संख्या को दर्शाता है। जब सोनू से पूछा गया कि यदि $x + 6$, 10 से कम हो तो x का मान क्या होगा, तो उसने जवाब दिया $x = 1$। जब पूछा गया कि क्या और भी कोई संभावना हो सकती है। तो उसने कहा, नहीं हों सकती।

v) ज्यादातर बच्चे 3a या a^3 जैसे प्रस्तुतीकरण से चक्कर में पड़ जाते हैं। वे a^3 और 3a में फर्क नहीं करते। कई बार जब उन्हे 3a और 2a को जोड़ने को कहा जाता है, तो वे a^5 लिख देते है।

vi) कई बच्चे यह नही समझ पाते कि अक्षरों पर संक्रियाओं के नियम कैसे लागू करें? कुछ बच्चे $3x + x + 5x = 8x$ लिखे हैं (x का गुणांक 1 को अनदेखा), कुछ $a^{m-n} = a^m - a^n$ लिख देते हैं।

E5) चर की अवधारणा के उपयोग से संबंधित तीन और ऐसी गलतियाँ बताइए, जो बच्चे करते हों?

बच्चों को ऐसी बहुत सी गलतफहमियों से छुटकारा पाने में मदद कैसे करें? इस संदर्भ में कोई भी तरीका सोचते वक्त हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि बहुत धीमे–धीमे आगे बढ़ना होगा। अपने तरीके का खाका बनाने से पहले निम्न उदाहरण को देखे–

उदाहरण 1

सुश्री आचार्य बताती है, "बच्चे जब मेरे पास आते हैं, तो उन्हे संख्याओं की एक समझ होती है तथा उन पर संक्रियाएं लागू करने का अनुभव होता है। मै कोशिश करती हूँ कि उनके इस अनुभव के आधार पर ही उन्हे बीजगणित से परिचित कराऊं।" वह करती यह है कि कक्षा में एक बन्द बड़ा डिब्बा लेकर आती है। बच्चे सोचने लगते हैं कि इसमें क्या होगा। वह बच्चों को बताती है कि इसमें आम भरकर अपने दोस्त को भेजने वाली है और फिर उनसे पूछती है, "तुम्हारे ख्याल से इसमें कितने आम आ जाएंगे?" कक्षा के चारों कोनों से अलग–अलग जबाव आने लगते हैं 50, 40, 60। तब वह कहती है, ठीक है। तुम अपनी–अपनी संख्याएं याद रखना अब यदि मै इसमें 5 आम और जोड़ दूं, तो मेरे पास कितने आम हो जाएंगे?" थोडी हिचक के बाद कक्षा में हर तरफ से आवाजें आने लगती हैं। 55, 45, 65 आदि संख्याओं से। तब वह बोर्ड पर लिख देती है कि अब उनके पास कितने आम होंगे : (आमों की संख्या) + 5

सुश्री आचार्य मानती है कि इस मुकाम पर पहुंचना तथा इसे समझना, बच्चों के लिए बहुत मुश्किल होता है। वे इससे काफी देर तक जूझते हैं। वह उन्हे प्रोत्साहित करती है कि वे इस विषय मे अपने विचारों की चर्चा

करें कि उनके ख्याल से हो क्या रहा हैं। कभी–कभी बहस भी हो जाती है। लेकिन धैर्यपूर्वक तथा विभिन्न संख्याओं के साथ बारम्बार जांच करने के बाद वे ऊपर दिए गए प्रस्तुतिकरण को मान लेते हैं।

फिर वह उनसे पूछती है, "अब मान लो, छोटू इनमें से 2 आम खा जाए। तो मेरे पास कितने आम बचेंगे?" वह और बच्चे इस पर चर्चा करते है तथा हम नतीजे पर पहुंचते है कि उनके उत्तरों 53, 43 को ऐसे भी लिख सकते हैं– (आमों की संख्या) + 5 − 2, जो (आमों की संख्या) + 3 के बराबर है।

वह उनका ध्यान इस बात की ओर लाती है कि हर बार 'आमों की संख्या' लिखने में फालतू मेहनत लगती है। फिर उनसे ही पूछती है कि क्या इससे बचने का कोई तरीका हो सकता है? वह उन्हें यह बता देती है क्योंकि आमों की ठीक–ठीक संख्या पता नही है, इसलिए उस जगह पर कोई एक संख्या नहीं लिखी जा सकती। क्या इसके लिए कोई छोटा चिन्ह लिख सकते हैं? यदि इस संख्या को n कहें तो कैसा रहें? तब 'आमों की संख्या' लिखने की बजाय सिर्फ n लिखा जा सकता है, जहां n कोई भी संख्या हो सकती है। बच्चे आम तौर पर इससे सहमत होतें हैं। तब वह बोर्ड पर $n + 3$ लिख देती है साथ ही कह देती है कि उसके पास अब $n + 3$ आम हैं।" अब मान लो कि मै उसी आकार के आमों का एक और डिब्बा इसमें जोड़ देती हूं। तब मेरे पास कितने आम हो जाएंगे?" बच्चों को इसके बारे में सोचने में शामिल करते हुए धीरे–धीरे वह उनसे लिखवा लेती है: $n + n + 3$.

अब वह एक तालिका बना देती है :

एक डिब्बे में आमों की संख्या	10	20	30	.... n
दो डिब्बों में आमों की संख्या	20	40	60	.... $n + n$
मेरे पास आमों की संख्या	23	43	63	.... $n + n + 3$

यहां वह पूछ सकती है, "क्या हम पक्के तौर पर कह सकते है कि डिब्बे में आमों की संख्या 10 है? या 20 है? या 30 है?" उदाहरणों के जरिए वह उन्हें यह समझने में मदद करती है कि संख्या कुछ भी हो सकती है – 15, 25, 47..... और इनमे से किसी भी संख्या के लिए वे $2n+3$ निकाल सकते हैं, जो कि उसके पास मौजूद आमों की संख्या होगी। फिर वह उन्हें यह बताती है। आमों की संख्या दर्शाने के लिए वे जिस अक्षर n का उपयोग कर रहे है वह एक चर है क्योंकि यह कोई भी संख्या हो सकती हैं।

वह इसी तरह आगे बढ़ते हुए कोशिश करती है कि बच्चे चर का अर्थ व इस्तेमाल के बारे में सोचें। उनकी समझ को पुख्ता बनाने के लिए वह नीचें दिए गए कुछ उदाहरण भी उनके साथ करती है।

i) **बच्चे और उसकी माँ की उम्र के बीच का संबंध :** वह उन्हें बताती है कि मां की उम्र बच्चे की उम्र के 5 गुने से 6 वर्ष ज्यादा है। वे आपस मे चर्चा करके बताएं कि इस संम्बंध को कैसे दर्शाएंगे। (यदि बच्चे की उम्र को चर x मान लें, तो मां की उम्र $(5 \times x + 6)$ होगी।)

ii) **किसी प्राकृतिक संख्या की अगली प्राकृतिक संख्या :** वह उनसे पूछती है कि वे इस बात को प्रतीकों से कैसे दर्शाएंगे कि किसी प्राकृतिक संख्या की अगली प्राकृतिक संख्या 1 जोड़ने से प्राप्त होती है। (यदि संख्या n है, तो अगली संख्या $n + 1$ होगी।)

iii) **तिकोन बनाने के लिए जरूरी तीलियों की संख्या :** वह बच्चों से पूछती है कि 1 तिकोन तथा दो तिकोन (जो एक दूसरे को न छुएं) बनाने में कितनी तीलियां लगती है? वह उनके जवाबों को एक तालिका के रूप में लिख देती है :

तिकोनों की संख्या	1	2	3 ....
तीलियों की संख्या	3	6	9 ....

फिर वह उनसे कहती है कि तिकोनों की संख्या और उनमें लगने वाली तीलियों की संख्या के बीच संबंध पता करें। एक बार ये पैटर्न पहचान लेते हैं, तो वह उनसे कहती है कि इसे प्रतीकों में लिखें। (x तिकोन बनाने के लिए आपको $3 \times x$ तीलियों लगेंगी।)

iv) वह उन्हे नीचे दिए गए संख्या पैटर्न दिखाती हैं।

$2 \times 1 + 15 = 17$

$2 \times 0 + 17 = 17$

$2 \times 5 + 7 = 17$

: : :

: : :

फिर वह उनसे कहती है कि वे संख्याओं की दस और जोड़ियां पता करें जिन्हे $2 \times \square + \bigcirc = 17$ के चकोर व गोले में लिखा जा सके।

इस तरह सुश्री आचार्य समय–समय पर ऐसे उदाहरण व अभ्यास करती रहती है, उसे लगता है कि इस तरह से बच्चे चर का मतलब सीख पाते हैं।

E6) सुश्री आचार्य के तरीके की खूबियां व कमियां क्या हैं?

E7) ऐसे ही तीन उदाहरण बनाइए जिनमें किसी संबंध को चर के इस्तेमाल से दिखाना हो।

एक बार बच्चे चर की अवधारणा के साथ सहज हो जाएं, तब उन्हे इससे निपटने के तरीके सिखाएं जा सकते हैं। आइए, ऐसा करने के कुछ तरीके देखें।

चर का इस्तेमाल

अगर आप स्कूल के पाठ्यक्रमों को देखें, तो पाएंगे कि स्कुली गणित में चर का इस्तेमाल ज्यादातर निम्नलिखित स्थितियों में होता है।

i) सूत्रों में (जैसे– किसी वर्ग की परिधि वर्ग का क्षेत्रफल)।

ii) समीकरण हल करने में (जैसे, $x + 3 = 10$ तो $x = 7$)।

(i) सूत्रों में इस्तेमाल

कुछ दिनों पहले मै एक गणित केन्द्र में एक कार्यशाला में गई थी। बच्चों को सूत्रों को लागू करना सीखने से संबंधित बातचीत व चर्चा के दौरान निम्नलिखित बातें सामने आईं।

चित्र 1 : चौकोर कागज़ पर 4 इकाई वाला वर्ग

यह कतई जरूरी नही है कि जब कक्षा 5 या 6 में पहुंच जाएं, तभी उन्हे सूत्रों से परिचय दिया जाए। कक्षा 3 के बच्चे भी सूत्र बनाना और उनका इस्तेमाल

करना सीख सकते हैं। इसके लिए हम शुरूआत वर्ग के उदाहरण से कर सकते हैं। हम बच्चों से कह सकते हैं कि वे चौखाने कागज की लाइनों का इस्तेमाल करते हुए अलग–अलग लम्बाई के वर्ग बनाएं (चित्र 1) फिर हम उनसे हरेक वर्ग का परिमाप (perimeter) नापने को कह सकते हैं। उनसे निम्नानुसार चार्ट बनाने को कहा जा सकता है।

वर्ग की लम्बाई	1 इकाई	2 इकाई	5 इकाई	10 इकाई
वर्ग का परिमाप	4 इकाई	8 इकाई	20 इकाई	40 इकाई

बच्चों से कहा जाए कि वे इन परिणामों को देखें और वर्ग की लम्बाई व परिमाप का संबंध दर्शाने वाला नियम पता करने की कोशिश करें। हम चर्चा के माध्यम से उन्हें यह नियम पता करने में मदद कर सकते हैं। यदि कोई बच्ची गलत नियम पर पहुंच जाती है, तो जरूरी होगा कि हम विस्तार से इस पर चर्चा करें और यह भी समझाएं कि क्यों यह नियम गलत है चर्चा के माध्यम से हम उन्हें नीचे दिए गए नियम तक पहुंचने में मदद दे सकते है :

लम्बाई L के वर्ग का परिमाप 4L होता है।

इसी प्रकार से वर्ग के क्षेत्रफल की तालिका बनवाकर, क्षेत्रफल का सूत्र भी निकालवाया जा सकता है। क्षेत्रफल को चौखाने कागज के वर्गों की संख्या में दिया जा सकता है।

जब बच्चे एक चर वाले सूत्रों के साथ सहज हो जाएं तो हम उन्हें आयत का परिमाप व क्षेत्रफल के सूत्रों से परिचित करा सकते हैं। इनमें दो चरों का इस्तेमाल होता है। उनकी मदद के लिए हम उनके साथ यह चर्चा कर सकते हैं कि क्यों किसी आयत की भुजा की लंबाई एक चर है? वे जब इस बात को समझकर मान लें तब वे लम्बाई को L से दर्शा सकते हैं। फिर हम उनसे पूछ सकते हैं कि क्या चौड़ाई भी एक चर है? क्या मै इसे L मान सकती हूं? या नहीं? यदि मै ऐसा करूं तो क्या होगा?" उन्हे खुद इस नतीजे पर पहुंचने दीजिए कि यदि लम्बाई व चौड़ाई दोनों को एक ही अक्षर से दर्शाया गया, तो वे दोनों बराबर होंगी। ऐसा आयत तो वर्ग हो जाएगा– वह कोई व्यापक आयत नहीं रहेगा।

उनसे चौखाने कागज पर अलग–अलग आयत बनवाकर, उन्हे यह निष्कर्ष निकालने दें कि चौड़ाई भी एक चर है, जो L से अलग है। इसका मान L के मान पर निर्भर नहीं करता। यह एक महत्वपूर्ण चरण है और बच्चों को इसे समझने के लिए काफी समय व कई सारे उदाहरण दिए जाने चाहिए।

जब बच्चे एक ही सूत्र में दो स्वतंत्र चरों की बात से अवगत हो जाएं, तब उनसे निम्नानुसार एक चार्ट बनाने को कहा जा सकता है और फिर (जैसे वर्ग में किया था) इस मामले में भी हम उनकी मदद कर सकते है कि वे परिमाप व क्षेत्रफल के सूत्र पर पहुंचे।

लम्बाई	चौड़ाई	परिमाप	क्षेत्रफल
2	3	10	6
4	5	18	20
3	7	20	21
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
L	b	2 x (L + b)	L x b

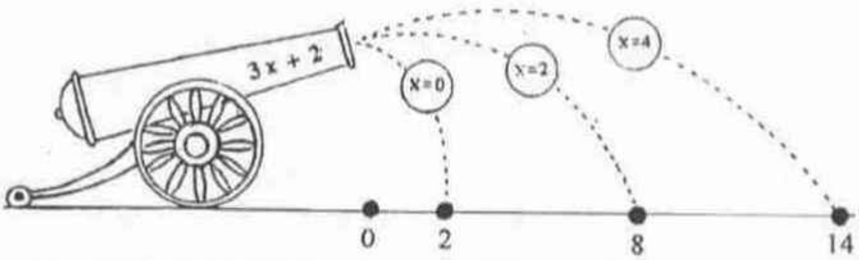
E8) क्या आप ऊपर सुझाए गए तरीके से सहमत है? यदि नहीं है, तो आप इसमें क्या बदलाव करेंगे?

सूत्रों का संबंध सिर्फ ज्यामिति से नहीं है। हम संख्याओं के संबंधो का भी व्यापकीकरण करके उन्हे सूत्रों के रूप में लिख सकते हैं। आप बच्चों से कोई भी दो संख्याएं बताने को कहें, मान लीजिए 2 और 3 बताई। फिर आप उनसे 2 + 3 व 3 + 2 के बीच सम्बंध देखने को कहिए। यही क्रिया आप संख्याओं की कई जोड़ियों के साथ कर सकते हैं। फिर आप उन्हे बीजगणितीय तरीके से यह दर्शाने की ओर ले जा सकते हैं कि किन्ही दो संख्याओं का जोड़, उनके जोड़ने के क्रम पर निर्भर नहीं है यानी

$a + b = b + a$ (जोड़ में क्रमविनिमेयता का सिद्धांत)

अब आप उनसे कह सकते है कि a और b के अलग–अलग मान लेकर जांच करें कि यह सूत्र सही है या नहीं। जैसे– यदि $a = 11$ और $b = 13$ या $a = 7$ और $b = 37$ हो, तब क्या यह सही होगा?

बीजगणित व्यंजकों में चरो की जगह संख्याओं को रखने के बारे में बच्चों की समझ और बेहतर बनाने के लिए आप 'तोप' का इस्तेमाल भी कर सकते हैं। यदि आप उन्हे यह समझाना चाहते है कि सिर्फ x ही नही, बल्कि $3x + 2$ भी एक चर है, तो आप $3x + 2$ तोप का इस्तेमाल कर सकते हैं। (चित्र 2)। इस तोप में आप x का जो मान डालेगें उसी के अनुसार गोला $3x + 2$ दूरी तक पहुंचेगा। यानी यदि आप तोप में 5 डालते हैं तो गोला $3 \times 5 + 2 = 17$ की दूरी तक जाएगा।



चित्र 2 : बीजीय व्यंजक के विशिष्ट मान ज्ञात करना

यहां उदाहरणों के जरिए बच्चों को एक बात स्पष्ट करना जरूरी है। यदि कोई नियम कई मानों के लिए सही है, तो भी जरूरी नही कि यह सभी मानों के लिए सही हो। यदि नियम एक भी मामले में गलत निकलता है, तो इस नियम को हम सही नहीं मान सकते।

E9) आप बच्चों को एक ऐसा सूत्र निकालने में कैसे मदद करेंगे, जो मिलीमीटरों और सेंटीमीटरों का संबंध दर्शाए।

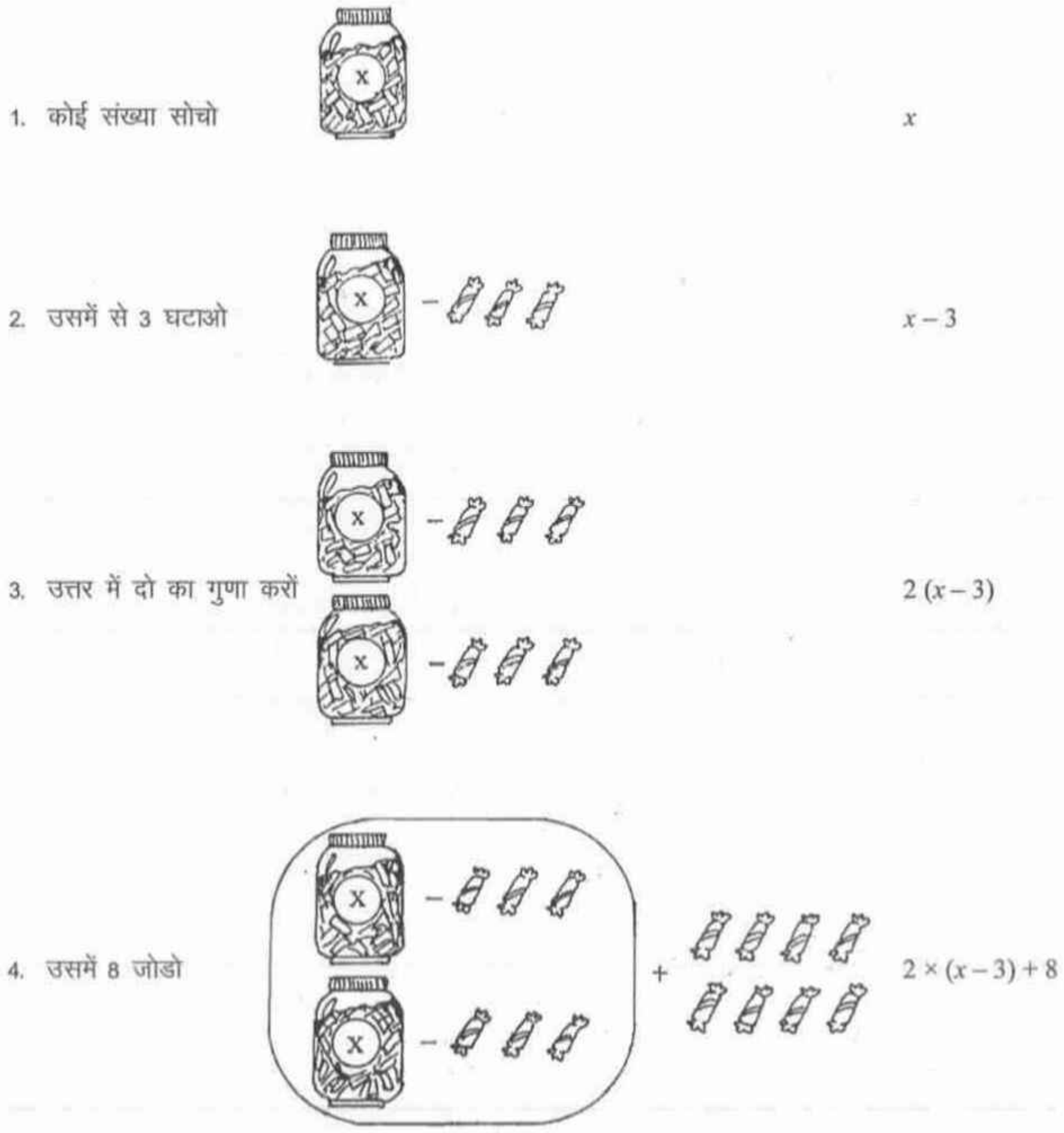
(ii) समीकरणों में इस्तेमाल

जब बच्चे यह समझ जाएं कि चर का अर्थ क्या है, तो उनका सम्पर्क ऐसी परिस्थितियों से कराया जा सकता है जिनमें उन्हे समीकरण हल करने की जरूरत हो। कक्षा 6 में पहुंचने तक, बच्चों को बराबर (=) के इस्तेमाल का काफी तर्जुबा हो चुका होता है। जैसे वे यह जानते हैं कि $3 + 2 = 5$, आदि। आप उनसे इस तरह के खाली स्थान भरने को कह सकते हैं। 3 + ... = 7 या 3 + ... ≠ 5, आदि। इन गतिविधियों के साथ–साथ आप उन्हे यह सोचने के लिए प्रोत्साहित कर सकते हैं कि कुछ मान तो उस कथन को सही साबित करते हैं। जबकि कुछ और मान उसे गलत ठहराते हैं।

इसके बाद आप ऐसी गतिविधियों की ओर बढ़ सकते हैं जिनमें चरों का इस्तेमाल करते हुए समीकरण बनानी होती है। आप बच्ची के साथ 'संख्या सोचो' का खेल खेल सकते हैं। उससे कहिए कि एक संख्या सोचें,

उसमें से 3 घटाए, उत्तर में 2 का गुणा करें और इसमें 8 जोड़ दे। अब बच्ची आपको बताए कि उसका उत्तर क्या आया। इसके आधार पर आप उसे बता सकते हैं कि उसने शुरू में कौन सी संख्या सोची थी? यदि बच्ची का उत्तर 12 है, तो उसने संख्या 5 सोची थी।

बच्ची आपके 'जादू' को देखकर शायद चकित रह जाएगी। अब आप उसे बता सकते हैं कि आपने यह कैसे किया। उसे नीचे दिए गए चार्ट के जरिए यह बात समझाई जा सकती है।



चित्र 3

यानी बच्चों को जो उत्तर मिला, वह था

$2 \times (x-3) + 8 = 12$

आप उसे बता सकते हैं कि यह एक चर वाले समीकरण का उदाहरण है। यहां आप इस बात पर जोर दे सकते हैं कि ऐसा कोई भी व्यंजक जिसमें 'बराबर' का चिन्ह शामिल हो, समीकरण होगा। जैसे (i) $3x + 5 = 7$, (ii) $3 + 2 = 5$ या (iii) $2(x-3) + 8 = 12$। हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि समीकरण के एक पक्ष को 'सवाल' तथा दूसरे पक्ष को 'उत्तर' कहकर न पुकारें। ऐसा करने पर बच्ची के दिमाग में '=' चिन्ह का इस्तेमाल को लेकर गलतफहमी पैदा होती है।

हमें इस बात पर भी ध्यान देना चाहिए कि **x के किसी भी मान के लिए, '=' के दोनों तरफ मान बराबर होने चाहिए।** आप बच्ची से कह सकते हैं जो समीकरण आपने लिखा है, उसमें वह x के अलग–अलग मान डालकर देख लें कि उनके लिए समीकरण सही है या नहीं। जैसे वह $x = 1, x = 3$ $x = 5, x = 2$, आदि आजमा सकती है। वह देख पाएगी कि यह समीकरण $x = 5$ के लिए ही सही है। x का कोई अन्य मान, जैसे $x = 3$ लेने पर उसे $8 = 12$ मिलेगा, जो वह जानती है कि गलत है। (समीकरण (iii) के लिये)

अब आप बच्ची को समीकरण सुलझाने में मदद कर सकते है। इस मुकाम पर उसे पहली बात यह सीखनी होगी कि वह समीकरण के एक पक्ष पर जो भी संक्रिया लागू करे, दूसरे पक्ष पर भी वही संक्रिया लागू करनी होगी। सिर्फ संख्याओं वाले समीकरणों का उपयोग करके आप उसे यह बात समझने में मदद दे पाएंगे। मसलन, यदि आप सिर्फ $3 + 2 = 5$ के एक पक्ष में 3 जोड़ देगें, तो यह समीकरण गलत हो जाएगा।

अब आप समीकरण सुलझाने की ओर बढ़ सकते हैं। शुरू में आप $x + 3 = 8$ जैसे समीकरण ले सकते हैं। उसे यह सोचना चाहिए कि $x + 3$ से x तक कैसे पहुंचे। आप उसे कुछ संकेत दे सकते हैं– जैसे यदि दोनों तरफ से 1 घटा दें, तो क्या होगा? 3 घटा दे तो क्या होगा? इसके बाद धीरे–धीरे $2 \times x = 6, 2 \times x + 3 = 7$ और $2 \times (x-3) + 8 = 12$ जैसे समीकरणों की ओर बढ़ा जा सकता है।

(ध्यान दें कि हम $2x$ की बजाय $2 \times x$ लिख रहे हैं। इसका कारण यह है कि बच्चे के दिमाग में भ्रम उत्पन्न न हो। इसलिए जरूरी है कि शुरूआती चरणों में गुणा का चिन्ह लिखा जाए। जब बच्ची चरों के साथ संक्रियाएं लागू करने की आदी हो जाएं, तब $2 \times x$ तथा $2x$ दोनों का इस्तेमाल एक दूसरे के बदले कर सकते हैं, ताकि वह अच्छी तरह समझ जाए कि $2x$ का मतलब क्या है।)

जब आप समीकरण $2 \times (x-3) + 8 = 12$ पर पहुंचे, जिसे आपने उसके साथ बनाया था, तब आप उसे बता सकते हैं कि इस समीकरण को हल करने के लिए उन सारें चरणों को उलटा देंगे जो इसे बनाने में इस्तेमाल की गई थीं। चूंकि, आखिरी चरण '8 जोड़ों' था, इसलिए अब वह $2 \times (x-3) + 8 = 12$ के दोनों ओर से 8 घटा सकती है। इस प्रकार से उसे निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होगा:

$2 \times (x-3) = 4$

इसे बाद वह दोनों ओर 2 से भाग दे सकती है; जिससे प्राप्त होगा

$x - 3 = 2$

आखिर में दोनों ओर 3 जोड़ने पर $x = 5$ मिलेगा, जो कि उत्तर है।

इस तरह की गतिविधि कई दिनों तक करनी होगी। इसे अलावा साल भर अभ्यास भी चलने चाहिए। इनमें ऐसे अभ्यास भी होने चाहिए जिनमें बच्चों को 'संख्या सोचो' के अपने खेल बनाने में प्रोत्साहन मिले।

E10) 'संख्या सोचो' का एक खेल किसी 10 वर्षीय (या उससे बड़े) बच्चे के साथ आजमाइए। यह ध्यान दीजिए कि जो समीकरण बनें उसमें एक चर और कम से कम दो संक्रियाएं शामिल हो। आप बच्चे को इसे सुलझाने में मदद कैसे करेंगे?

सारांश

1) बीजगणित से बच्चों का सम्पर्क संख्या पैटर्नों व अंकगणित के संबंधों के व्यापकीकरण के रूप में।

2) बच्चे गणितीय दृष्टि से स्वीकार योग्य व्यापकीकरण करने की क्षमता को हासिल करने के तरीके।

3) बीजगणित सीखने से बच्चों को पैटर्नों पहचानने, समूह की वस्तुओं के सामान्य गुण खोजने और इन गुणों व संबंधों को आगे व्यापकीकृत करने में मदद मिलती हैं। इन सबको संक्षेप मे और स्पष्ट ढंग से व्यक्त करने की क्षमता भी विकसित करने में सहायता मिलती है।

4) इस व्यापकीकरण को व्यक्त करने में जो अवधारणा मददगार होती है, वह है चर की अवधारणा।

5) बच्चों को चर का अर्थ समझाने के तरीके।

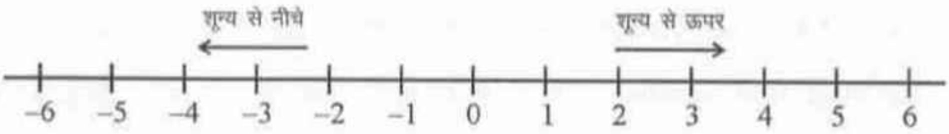
6) बच्चों को सूत्र विकसित करने तथा इस्तेमाल करने की क्षमता सीखने में मदद देने के तरीके।

7) बच्चों को समीकरण बनाने व हल करने की क्षमता सीखने में मदद देने के तरीके।

इकाई 6 के पाठ 16, 17 के अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

पाठ 16 : ऋणात्मक संख्याएँ

E2 जैसे बच्चे तापमान नापना से परिचित होते हैं। विज्ञान की कक्षा में बच्चे सीखते हैं कि बर्फ का गलनांक 0° से. होता है। टी.वी., रेडियो और अखबारों के माध्यम से कई बच्चे जानते हैं कि बहुत ठण्डे इलाकों में तापमान शून्य से 2° नीचे यानी –2° हो जाता है। हम उन्हें यह बता सकते हैं कि कैसे जब कोई स्थान ठण्डा होता जाता है, वैसे–वैसे तापमान शून्य से और नीचे होता जाता है। जैसे शून्य से 15° नीचे (यानी –15°)। यह –10° की तुलना में ज्यादा ठण्डा होता है। हम इसे तापमान रेखा पर दर्शा सकते हैं। शून्य के बाईं ओर वे तापमान है जो शून्य से नीचे है और दाईं ओर के तापमान शून्य से ऊपर है। इससे उन्हें यह समझने में मदद मिलती है कि जैसे–जैसे शून्य के नीचे संख्या बड़ी होती जाती है, हम शून्य से उतना ही दूर हटते जाते हैं।



तापमान रेखा

तापमान रेखा से बच्चों को यह समझने में मदद कर सकते हैं कि जैसे–जैसे हम इस रेखा पर दाईं ओर बढ़ते हैं वैसे–वैसे तापमान बढ़ता है। थोड़े अभ्यास के बाद उनसे पूछ सकते हैं कि वे रेखा को देखकर बताएं कि –15 और –5 में से कौन सा बढ़ा है?

E3 जैसे कि –2 की तुलना में –10 शून्य से ज्यादा दूर है और –10 से +2 की ओर चलते हुए हम शून्य के करीब आते हैं।

E4 2 पासे लीजिए। एक सामान्य पासा हो और दूसरे के तीन पहलुओं पर '–' चिन्ह और तीन पहलुओं पर '+' चिन्ह लगे हों।

हर बार पासे फेंकने के बाद बच्ची को यह देखना होगा कि दोनों पासों पर क्या आया है। यदि सामान्य पासा 4 दिखाता है और चिन्ह पासा '+' दिखाता है तो +4 आया है। यदि चिन्ह पासा '–' दिखाता है तो –4 आया है। इसी के मुताबिक वह संख्या पट्टी पर 4 स्थान दाईं ओर या बाईं ओर चलेगी। हर बार जब बची यह करे तो उसे प्रेरित करे कि वह बोलकर बताए कि वह क्या कर रही है और क्यों?

इस गतिविधि को एक व्यक्तिगत या सामूहिक खेल के रूप में भी किया जा सकता है।

E5 हम हर ढक्कन को +1 और हर डिबिया को –1 मान लें। तो एक ढक्कन व एक डिबिया परस्पर एक–दूसरे को शून्य कर देंगे। यानी एक पूरी माचिस शून्य दर्शाएगी। मान लीजिए कोई बच्ची 3 और –5 को जोड़ना चाहती है तो सबसे पहले 3 ढक्कन और 5 डिबिया ले लेगी फिर इनमें से जितने कट सकते हैं काट देंगे। इस प्रकार 3 जोड़िया बनेगी और उसके पास 2 डिबिया बचेंगी। यानी –2 तो 3 + (–5) = –2

इसे अलग–अलग वस्तुओं जैसे पेन व उसके ढक्कन, संख्या रेखा आदि लेकर हल करना चाहिए।

धीरे–धीरे इन अलग–अलग वस्तुओं को हटाकर सिर्फ संख्या रेखा रखी जा सकती है, जब तक कि बच्ची नियम को न पकड़ ले।

जैसे कि एक खेल जो सांप–सीढ़ी जैसा ही है। दो खिलाड़ी या दो समूह इस खेल में भाग ले सकते हैं। प्रत्येक के पास अलग रंग का बटन या प्लास्टिक की गोटी हो।

वे अपने–अपने बटन को संख्या पट्टी के शून्य पर रखे।

	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	

शुरूआत में एक खिलाड़ी X टोकनों के डिब्बे को अच्छे से हिलाए और एक टोकन निकाल ले। मान लीजिए कि +8 आया तो वह अपना बटन दाईं ओर ले जाकर +8 के खाने पर रख ले। फिर खिलाड़ी Y की बारी आएगी। मान लीजिए Y के –5 आया। तो वह अपनी बटन बाईं ओर ले जाकर –5 के खाने में रख ले। फिर पुनः खिलाड़ी X की बारी आएगी।

हर बारी खिलाड़ी अपने बटन की स्थिति निम्नानुसार बदल सकेगी–

(i) यदि टोकन धनात्मक संख्या दिखाए, तो उतने खाने दाईं ओर चले।

(ii) यदि संख्या ऋणात्मक है, तो उतने खाने बाईं ओर चले। जिस खिलाड़ी का बटन 50 पर पहुँच जाए वह खेल से हट जाएगा।

और जिस खिलाड़ी का बटन सबसे पहले 50 पर पहुँचे वह विजेता होगा। इस खेल को एक समय परकितने भी खिलाड़ी खेल सकते हैं, बशर्ते कि उनके पास अलग–अलग रंग के बटन हो।

E7 समय के संदर्भ में इसका उपयोग करते हुए हम बच्चों को संक्रियाओं का अभ्यास करा सकते हैं। उदाहरण के लिए हम बच्चों से पूछ सकते हैं कि "मान लो तुम्हारी परीक्षा 3 दिन पहले शुरु हुई थी और कुल 9 दिन चलने वाली है। तो बताओ कि आज क बाद कितने दिन और परीक्षा चलेगी?" या "दो दिन पहले मैं अपनी नानी के यहाँ गई थी। उससे 5 दिन पहले मेरी छुट्टियाँ शुरू हुई थी। तो बताओ मेरी छुट्टियाँ कितने दिन पहले शुरू हुई?" इन सवालों को हल करने के लिए उन्हें समय–रेखा का उपयोग करने दें।

समय–रेखा को बड़ा करके, लम्बी अवधियों को शामिल किया जा सकता है। आप इतिहास की विभिन्न घटनाओं पर, उनके घटित होने के वर्षों की बात कर सकते हैं। इसके बाद आप उनसे पूछ सकते हैं कि कौन सी घटना किससे पहले हुई। आप बच्चों से ऐसी पहेलियाँ भी पूछ सकते हैं जिनसे बच्चों को ऐसे विचार समझने में मदद मिले कि 3000 ईसा पूर्व ज्यादा पहले की बात है बनिस्पत 2010 ईसा पूर्व के। जैसे–

(i) इस वक्त राजू की उम्र 10 वर्ष है। वह किस वर्ष में पैदा हुआ था?

(ii) मेरी दादी का देहान्त सन् 1995 में 103 वर्ष की उम्र में हुआ। वे किस वर्ष में पैदा हुई थीं?

(iii) पाइथोगोरस की मृत्यु 597 ईसा पूर्व में 85 वर्ष की उम्र में हुई थी। उसका जन्म कब हुआ था?

(iv) यूक्लिड का जन्म 325 ईसा पूर्व में हुआ और वह 55 वर्ष जीया। उसकी मृत्यु कब हुई?

पाठ 17 : अंक गणित से बीजगणित की ओर

E1 जैसे 'दिन के बाद रात आती है।'

E2 इसे बीजगणित के तरीके से करने के लिए हमें समीकरण बनाकर उन्हें हल करना होगा। यह ज्यादा आसान व तेज तरीका है। यदि बेटे की उम्र x वर्ष है तो पिता की उम्र $(x + 30)$ वर्ष होगी। इसलिए 10 वर्ष पहले उनकी उम्र क्रमशः $(x - 10)$ तथा $(x + 20)$ वर्ष थी। हमें पता है कि $(x + 20) = 4 (x - 10)$

यानी $x + 20 = 4x - 40$

$20 + 40 = 4x - x$

$60 = 3x$ या $3x = 60$

या $x = \frac{60}{3} = 20$

अतः पिता की उम्र $= x + 30$

$= 20 + 30 = 50$ वर्ष है।

E3 उदाहरण के लिए, इससे हर चरण के बारे में तार्किक ढंग से सोचने और उन चरणों के विकास को भी तर्कपूर्ण ढंग से समझने की क्षमता विकसित करने में मदद मिलती है। इससे बच्चे को गणित का स्वरूप महसूस करने में भी मदद मिलती है।

E4 जैसे कई बच्चे मानते हैं कि जिस आकृति का परिमाप ज्यादा होगा, उसका क्षेत्रफल भी ज्यादा होगा? क्या आपने बच्ची को ऐसे उदाहरण दिए, जिससे उसे पता चल सके कि उसका व्यापकीकरण गलत है?

E5 बच्चों से सम्पर्क के दौरान आपको ऐसे कई उदाहरण मिलेंगे जैसे–

(i) $2x (3y + 6) = 2x \times 3y + 6$

(ii) जब $x = 7$ और $y = 5$ हो तो, $4xy = 475$ होगा।

(iii) $(x + 8)^2 - x^2 + 64$

E6 हमारे अनुसार सुश्री आचार्य के तरीके में कुछ खूबियाँ ये हैं–

यह धीरे–धीरे विकसित होती है, अनौपचारिक है, सहज ज्ञान पर आधारित है, छात्रों के लिए रोचक है और इससे जो समझ बनेगी।

वह लम्बे समय तक टिकी रहेगी।

इसकी एक खास खूबी यह है कि इसमें अवधारणा विकसित करने तथा समझ पर जोर दिया है, जो कि रटाने के तरीके का उल्टा है।

E9 इस सूत्र से संबंधित एक आम गलती यह होती है कि इसे $10c = m$ लिखने की बजाय $10\,m - c$ लिख दिया जाता है, जहाँ c व m क्रमशः सेंटीमीटरों व मिलीमीटरों की संख्या है।

इकाई – 7
वैदिक गणित व भारतीय गणितज्ञ

पाठ – 18 वैदिक गणित व भारतीय गणितज्ञ

वैदिक गणित में गुणा करना – द्वन्द्व योग विधि – घन – घनमूल – भारतीय गणितज्ञ

वैदिक गणित वह गणित है जिसका उपयोग वेदों में किया जाता है तथा जाता रहेगा। वैदिक गणित में अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति, ठोस ज्यामिति, गोला, शंकु आदि आकृतियों से संबंधित प्रश्नों को हल करने के सरल तरीके उपलब्ध हैं।

पाठ – 17
वैदिक गणित व भारतीय गणितज्ञ

पाठ की रूपरेखा

- परिचय
- वैदिक गणित में गुणा करना
  - वर्ग
  - वर्गमूल
  - घन
  - घनमूल
- भारतीय गणितज्ञ

परिचय

मैंने कक्षा दो में जब घटाना सीखा तो हमारे गुरूजी ने घटाने की प्रक्रिया कुछ इस तरह से समझाई–

- 34 में से 15 घटाना है।
- इकाई से इकाई घटाएँगे, लेकिन 4 से 5 घटाया नहीं जा सकता। (क्योंकि 5 बड़ा है 4 से)

$$\begin{array}{r} 34 \\ -15 \\ \hline \end{array}$$

- दहाई से 1 दहाई उधार लेंगे। एक दहाई, 4 इकाई से मिलकर 14 इकाई बन जाएगी।
- 14 इकाई में से 5 इकाई घट सकती है।

  घटाने पर 9 इकाई मिलेगी। इसे इकाई वाले खाने में नीचे लिखेंगे।

$$\begin{array}{r} 3 4^{14} \\ -15 \\ \hline 9 \\ \hline \end{array}$$

- क्योंकि दहाई से 1 उधार लिया था। अब इसे वापस करेंगे। दहाई में '1' के नीचे '1' लिखेंगे। यह '1' पहले मौजूद '1' के साथ मिलकर दो हो जाएगा।
- अब दहाई के '3' में से '2' घटाएँगे। 1 मिलेगा इसे दहाई के खाने में नीचे लिखेंगे ।
- और इस तरह हमारी पीढ़ी के लोगों ने 'उधार लेकर घटाना' सीखा। बाद में बच्चों और शिक्षकों के साथ काम करते समय मन में यह सवाल उठा कि उधार तो '3' से लिया था, जो पहली संख्या की दहाई है। इसे वापस किया तो '15' की '1' दहाई को क्यों किया?

$$\begin{array}{r} 3 4^{14} \\ -15 \\ \hline 19 \\ \hline \end{array}$$

इस पर सोचते हुए एक विचार आया कि घटाने को दो तरह से देखा जा सकता है। एक तो यह कि "समूह से कुछ चीजें निकालना," दूसरा "दोनों संख्याओं के बीच के अंतर को देखना।"

दूसरे रूप के आधार बनाने पर यह तरीका सामने आया कि दोनों संख्याओं में एक जैसी संख्या इस तरह जोड़ी जाए कि पहले वाली संख्या की इकाई दूसरी संख्या की इकाई से बड़ी हो जाए और घटाना संभव हो सके। एक जैसी संख्या जोड़ने से दोनों संख्याओं का अंतर यथावत रहेगा।

इसे पहले वाले उदाहरण के संदर्भ में देखें–

- 34 और 15 में एक निश्चित अंतर है।
- इन दोनों संख्याओं में एक जैसी कोई संख्या जोड़ने पर वह अंतर नहीं रहेगा।
- दोनों संख्याओं में दस–दस जोड़ा । (दस ही क्यों ?)
- पहली संख्या (34) में दस को दस इकाई के रूप में जोड़ा तो 4 इकाइयाँ बढ़कर 14 इकाइयाँ हो गई। दहाई 3 ही रही।
- दूसरी संख्या (15) में दस को '1' इकाई के रूप में जोड़ा। तो दहाई 2 हो गई और इकाई में 5 ही रहा।

$$\begin{array}{r} 3\ \ 4^{+10} \\ -1^{+1}5 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

अब हमारे प्रश्न का नया रूप हो गया–

14 इकाई में से 5 इकाई घटाने पर 9 इकाईयाँ मिलीं।

3 दहाई में 2 दहाई घटाने पर 1 दहाई मिली।

अंतर आया 19 ।

द.	इ.
3	14
2	5

कुछ समय बाद वैदिक गणित का अध्ययन करते समय एक मजेदार बात सामने आई। वहाँ की एक जैसी संख्या दोनों संख्याओं में जोड़ी गई थी लेकिन वह संख्या 10 नहीं थी।

वह संख्या इस पर निर्भर करती थी कि इकाई में किस संख्या को घटाया जाना है। यदि इसी उदाहरण पर गौर करें तो स्थिति कुछ ऐसी हो जाएगी–

वैदिक गणित में जिस विधि का उपयोग किया गया है उसके अनुसार दोनों संख्याओं की इकाइयों में 5–5 जोड़ा जाए।

$$\begin{array}{r} 34^{+5} \\ -15^{+5} \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

इससे एक नई परिस्थिति बनती है–

$$\begin{array}{r} 39 \\ -20 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

अब घटाना आसान हो गया।

एक दूसरा उदाहरण देखें।

$$\begin{array}{r} 43 \\ -27 \\ \hline \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 43^{+3} \\ -27^{+3} \\ \hline \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 46 \\ -30 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

(यहाँ पहले उदाहरण में 5 को 5 का और 3 को 7 का परम मित्र कहा गया।)

आप सोच रहें होंगे कि इन बातों को कहने का उद्देश्य क्या है? इन बातों के माध्यम से

हम यह कहना चाहते हैं कि किसी समस्या को हल करने के एक से ज्यादा तरीके हो सकते हैं। हर तरीका किसी न किसी तर्क पूर्ण आधार पर टिका होता है। कई बार हम तरीकों का उपयोग कर अपनी समस्याएँ तो हल कर लेते हैं लेकिन यह नहीं सोचते कि यह कैसे काम करता है। उन तरीकों का आधार ढूढ़ने में गणित का आंनद छुपा है। उन तरीकों का आधार ढूढ़ने में ही गणित का आंनद छुपा है। जब हम ऐसे किसी तरीके को समझने लगते हैं तो वहाँ गणित की सुंदरता दिखाई पड़ने लगती है। कुछ नया पा लेने की खुशी मिलती है।

वैदिक गणित में इस सुन्दरता को ढूंढ़ने के बहुत से मौके हैं। इसमें गणित की संक्रियाओं , वर्ग, वर्गमूल, धन, घनमूल, बीजीय संख्याओं पर संक्रियाओं, समीकरणों आदि के हल के कुछ ऐसे नियम हैं जो गणितीय समस्याओं के हल बहुत आसानी से देते हैं। बहुत से लोग इसे चमत्कार या जादू की तरह प्रस्तुत करते हैं। परंतु ऐसा नहीं है। हर सूत्र, हर विधि के पीछे कोई ना कोई आधार, कोई न कोई तर्क छुपा ही है। ये सभी शुद्ध गणित के तथ्यों और तर्कों पर अधारित है। इन्हें ढूंढ़ने का चस्का लग जाए तो गणित को समझने का आंनद आने लगता है।

अधिकांश हम समस्याओं को सुत्रों के प्रयोग से हल करके संतुष्ट हो जाते है। यह नहीं सोच पाते कि यह सूत्र या नियम कैसे काम करता है। जब हम इस प्रश्न पर विचार करते हैं तो उसके पीछे छिपे तथ्य और सिद्धांत प्रकट होने लगते हैं। यह किसी भी विद्यार्थी का रोमांचित करता है।

जिन ऋषियों ने इन सूत्रों की रचना की उनका उद्देश्य यह रहा होगा कि लोग अपने दैनिक क्रियाकलापों, व्यापार आदि में गणनाओं के लिए इन सूत्रों का प्रयोग करें और अपनी समस्याओं को आसानी से हल कर लें। सूत्रों के मौखिक रूप से प्रचलित होने का कारण शायद यह भी हो सकता है कि ज्ञान को लिखित रूप से संजो कर रखना और जन–साधारण को उपलब्ध कराना आज की तरह आसान न रहा हो। शायद इन्हीं कारणों से गणित की ऐसी पद्धतियाँ विकसित हुईं जिनमें मौखिक कार्य अधिक और लेखन कार्य कम से कम हो।

वैदिक गणित के रूप में प्रकाशित एक पुस्तक में यह संदर्भ मिलता है कि गोवर्धन पीठ के 143 वें शंकराचार्य जगत गुरू स्वामी भारती भुष्ण जी ने वेदों में स्थान–स्थान पर दिए गणित पद्धतियों के 16 सूत्र व 13 उपसूत्र एकत्रित किए। उनका कहना था कि ये सूत्र अथर्ववेद के परिशिष्ट के रूप में देखे जा सकते हैं।

'वैदिक गणित में अंक गणित ,बीज गणित, ज्यामिति,ठोस ज्यामिति ,गोला, शंकु आदि आकृतियों से संबंधित प्रश्नों को हल करने के सरल तरीके उपलब्ध हैं। कुछ विशेषताएँ इस प्रकार हैं–

1. वैदिक गणित की पद्धतियाँ क्रमबद्ध और लचीली होती हैं।
2. वैदिक गणित विविधता, लचीलेपन और सृजनात्मकता को बढ़ाता है।
3. वैदिक गणितीय पद्धति की स्वाभाविक मानसिक प्रणालियों के नियमित अभ्यास से मस्तिष्क का स्वतः ही विकास होने लगता है। यह कम्प्यूटर द्वारा प्रश्न हल करने से संभव नहीं है।
4. वैदिक गणित में प्रत्येक गणितीय समस्या को हल करने की अनेक विधियाँ हैं जिनके प्रयोग से विद्यार्थियों में उत्साह, आनंद, विश्वास और अनुसंधान प्रवृत्ति का जागरण होता है।
5. यह गणित अध्ययन के दृष्टिकोण में क्रांति लाने वाला है तथा शोध एवं विकास के लिए नवीन दृष्टिकोण प्रस्तुत करता है।
6. इस पद्धति में उत्तर की सरल जांच पद्धति भी समाविष्ट है।
7. वैदिक गणित द्वारा हर भारतीय के हृदय में अपने देश,धर्म,संस्कृति और इतिहास के प्रति गौरव की भावना पैदा होती है। इससे अपने महान पूर्वजों के प्रति हमारा मस्तक श्रद्धा से नत हो जाता है यह भावना Shortcuts in maths कहने से नहीं आ सकती।
8. वैदिक गणित पद्धति ग्रामीण,वनवासी, गिरिकन्दराओं एवं झुग्गी–झोपड़ी में निवास करने वाले विद्यार्थियों एवं उनके अध्यापकों के लिए विद्या भारती के लक्ष्य के अनुरूप गणित विषय को विशेष रूप से सुखद एवं रोमांचक बनाती है।

यहाँ हमने परिचय के रूप में बहुत थोड़ी सी सामग्री रखी है। देखना है, आप इन्हें जिस तरह देखते है।

वैदिक गणित में गुणा करना

वर्ग

गुणा में हमने जिन विधियों का अभ्यास किया है, उन विधियों से वर्ग सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

1. **सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण** – यदि संख्या केवल 9 के अंक से बनी हो तो इस विधि का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण :–

A) $99^2 = \frac{99 \times 99}{98/01}$ उत्तर = 9801

B) $9999^2 = \frac{9999 \times 9999}{9998/0001}$ उत्तर = 99980001

2. **सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण** – यदि संख्या की इकाई का अंक 5 हो तो इस सूत्र का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण (1)

$35^2 = \frac{35 \times 35}{12/25}$ उत्तर = 1225

बायाँ भाग दायाँ भाग

$(3+1) \times 3 = 12$ $(5 \times 5) = 25$

उदाहरण (2)

$65^2 = \frac{65 \times 65}{42/25}$

बायाँ भाग दायाँ भाग

$(6+1) \times 6 = 42$ $(5 \times 5 = 25)$

उदाहरण (3)

$125^2 = \frac{125 \times 25}{156/25}$ उत्तर = 15625

3. **सूत्र यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्ग च योजयेत (जितना कम है उतना कम करके, जितना कम है उसका वर्ग मिला दें)**

   i. जिस संख्या का वर्ग करना है उसका आधार से विचलन ज्ञात कर लेते हैं।
   ii. विचलन ऋणात्मक हो तो घटाकर व धनात्मक हो तो जोड़कर उत्तर का बायाँ भाग प्राप्त करते हैं।
   iii. विचलन का वर्ग करके दायीं ओर लिख देने पर हल पूर्ण हो जाता हैं।

उदाहरण 1. **96^2**

हल : यहाँ आधार 100 है। विचलन 96 −100 = - 4

$\therefore$ 96^2 = (96 − 04) / (− 0 4) ^{2}

= 9216 उत्तर

उदाहरण 2. **1013^2**

हल : $\therefore$ आधार 1000 है। विचलन 1013−1000 = + 13

1013^2 = $(1013+013)/(013)^2$

= 1026169 उत्तर

4. सूत्र द्वन्द्वयोग – यह सूत्र ऊर्ध्व तिर्यक का ही अनुप्रयोग है।

हम पहले द्वन्द्व योग ज्ञात करना समझेंगे

1. एक अंक का द्वन्द्व योग जैसे 2 का द्वन्द्व योग $= 2^2 = 4$
2. दो अंकों का द्वन्द्व योग जैसे 23 का द्वन्द्व योग $= 2\ (2 \times 3) = 12$
3. तीन अंकों का द्वन्द्व योग जैसे 324 का द्वन्द्व $= 2(3 \times 4) + 2^2 = 28$
4. चार अंकों का द्वन्द्व योग जैसे 5324 का द्वन्द्व $= 2(5 \times 4 + 3 \times 2) = 52$

उदाहरण 1. 43^2 (दहाई इकाई का द्वन्द्व योग / दहाई का द्वन्द्व योग / इकाई का द्वन्द्व)

	4^2	2X (4x3)	3^2
हल : 43^2 =	18	4	9
	2		

टीप : हल इकाई की ओर से करते हैं।

उदाहरण 2. 231^2

हल : 231^2 = सै.का द्वन्द्व योग / सै.द. का द्वन्द्व योग / सै.द.इ.का द्वन्द्व योग / द.इ.का द्वन्द्व योग / इ. का द्वन्द्व योग

2^2	2 X (2 X 3)	2 X (2 X 1) + 3^2	2 X (3 X 1)	1^2
= 5	3	3	6	1
1	1			

= 53361

वर्गमूल

विलोकनम विधि – पाँच अंकों तक की पूर्ण संख्याओं का वर्गमूल हम अवलोकन से ही ज्ञात कर सकते हैं। निम्नलिखित तालिका का अवलोकन कीजिए –

अंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
अंक का वर्ग	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
वर्ग की इकाई	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

वर्ग की इकाई	वर्गमूल संख्या की इकाई
0	0
1	1 या 9
4	2 या 8
5	5
6	4 या 6
9	3 या 7

टीप – वर्ग संख्या में इकाई की ओर से जितने जोड़े बनेंगे, वर्गमूल की संख्या में उतने ही अंक होंगे।

उदाहरण – $\sqrt{3969}$ का मान ज्ञात करो।

1. संख्या 3969 में दो जोड़े बन रहे हैं, अतः वर्गमूल में दो अंक होंगे।
2. बायें जोड़े (39) से दहाई तथा दायें जोड़े (69) से इकाई निश्चित करेंगे।
3. वर्ग संख्या की इकाई में 9 है, अतः वर्गमूल का इकाई 3 या 7 होगी।
4. 39 का निकटतम वर्गमूल 6 है, अतः वर्गमूल 63 या 67 है।
5. 63 या 67 के बीच ऐसी संख्या जिसकी इकाई 5 है, वह संख्या 65 है
6. जिसका एकाधिकेन पूर्वे सूत्र से वर्ग $65^2 = 4225$

$\therefore$ 3969 छोटा है 4225 से। अतः 63 व 67 में छोटी संख्या 63 3969 का वर्गमूल है, अतः $\sqrt{3969} = 63$

द्वन्द्व योग विधि

किसी भी संख्या (पूर्ण या अपूर्ण वर्ग संख्या) का वर्गमूल ज्ञात करने की यह उत्तम विधि है। निम्न उदाहरण से हल की प्रक्रिया को समझेंगे।

उदाहरण 1. $\sqrt{283024}$ को हल कीजिए।

हल . 10 2 8 3 0 2 4

5, 3, 2

उत्तर $\sqrt{283024} = 532$

1. संख्या में 6 अंक हैं इसलिए 3 जोड़े बनेंगे, अतः वर्गमूल 3 अंकों की संख्या होगी।
2. प्रथम जोड़ा 28 का निकटतम वर्ग 5^2 है, अतः उत्तर का प्रथम अंक 5 होगा। 5 का दुगुना 10 हमारा भाजक होगा। (हमेशा प्रथम अंक का दुगुना भाजक लेते हैं)
3. $28 - 5^2 = 28 - 25 = 3$। शेष 3 को द्वितीय जोड़े के प्रथम अंक के सामने थोड़ा नीचे लिखेंगे। आपका भाज्य 33 होगा।
4. $33 \div 10 =$ भागफल 3, शेषफल $= 3$, उत्तर का द्वितीय अंक 3 है। शेष 3 को अगले अंक के सामने थोड़ा नीचे लिखेंगे।
5. उत्तर के प्रथम अंक का द्वन्द्व प्रयोग नहीं करते। द्वितीय अंक 3 का द्वन्द्व $=3^2 = 9$ होगा। $30 - 9 = 21$, अगला भाज्य $= 21$
6. $21 \div 10$ भागफल 2, शेषफल 1, उत्तर का तृतीय व अंतिम अंक 2 होगा। शेषफल 1 को अगले अंक 2 के ठीक सामने थोड़ा नीचे लिखते हैं।
7. का द्वन्द्व , शून्य को अगले अंक 4 के ठीक सामने थोड़ा नीचे लिखते हैं।
8. अंतिम अंक 2 का द्वन्द्व 4 प्रक्रिया समाप्त।

उत्तर $\sqrt{283024} = 532$

उदाहरण 2. $\sqrt{41242084}$ को हल कीजिए।

हल. 12 4 1 2 4 2 0 8 4

5 4 4 2 0 0

6 4 2 2

उत्तर – 6422

घन

1. **उप सूत्र अनुरूपेण** – हम जानते हैं कि

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{अतः } (a / b)^3 = a^3 \left| 3a^2b \right| 3ab^2 \left| b^3 \right.$$

उदा. 1 23^3

यहां , a = 2, b = 3

$$23^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 2^3 \left| \ 3.2^2.3 \ \right| 3.2.3^2 \ \left| 3^3 \right.$$

$$= 12167 \text{ उत्तर}$$

2. सूत्र. यावदूनंतावदूनीकृत्य कीं च योजयेत्

$$102^3 = 1 \big| 3\times 02 \big| 3\times(02)^2 \big| (02)^3$$

=1061208 उत्तर

$$104^3 = 1 \big| 3\times 04 \big| 3\times(04)^2 \big| (04)^3$$

= 1124864

घनमूल

विलोकनम उपसूत्र से 6 अंकों तक की पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात किया जा सकता है। निम्नलिखित सारणी को मुखाग्र याद कीजिए–

संख्या	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
संख्या^{3}	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
संख्या^{3} की इकाई	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
संख्या^{3} का बीजांक	–	1	8	9	1	8	9	1	8	9

उपरोक्त सारणी से पता चलता है कि किसी पूर्ण घन संख्या का बीजांक 1,8 या 9 ही होगा। यदि किसी संख्या का बीजांक 1, 8, 9 के अतिरिक्त कोई अन्य संख्या हो, तो वह पूर्ण घन नहीं होगा।

उदाहरण – 941192 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल – $\sqrt[3]{941192} = 98$

1. इकाई की ओर से तीन–तीन अंकों का समूह बनाते हैं। दो समूह हैं। अतः घनमूल में दो अंक होंगे।
2. संख्या की इकाई 2 है, अतः घनमूल की इकाई 8 होगी।
3. बायें समूह 941 से घनमूल की दहाई निश्चित करेंगे।

   $\because\ 9^3 = 729$ और

   $10^3 = 1000 \because\ 729 < 941 < 1000$ घनमूल की दहाई 9 होगी।

   उत्तर – 98

भारतीय गणितज्ञ

1. श्रीधराचार्य :–

श्रीधराचार्य का जन्म 750 ई. (लगभग) में हुआ। गणित के क्षेत्र में श्रीधर के ग्रन्थ अत्यन्त मूल्यवान हैं। इनके दो ग्रंथ उपलब्ध हैं – (1) पाटी गणित (2) त्रिशतिका। वर्ग समीकरण हल करने की श्रीधराचार्य की विधि को वर्तमान में पूर्ण वर्ग पद्धति के नाम से जाना जाता है।

चतुराहत वर्ग समै रूपैः पक्षद्वयं गुणयेत्।

अव्यक्तवर्ग रूपैर्युक्तौ पक्षों ततोमूलम्।।

ज्यामिति में श्रीधराचार्य का योगदान :–

1. वृत्तखण्ड के क्षेत्रफल का सूत्र।
2. घनाभ का आयतन।
3. लम्बवृत्तीय बेलन का आयतन।
4. शंकु के आयतन के सूत्र त्रिशतिका में विद्यमान है।

2. महावीराचार्य :–

महावीराचार्य दिगम्बर जैन शाखा के प्रमुख गणितज्ञ थे। इनका जन्मकाल 9वीं शताब्दी माना जाता है। इनका निवास स्थान कर्नाटक प्रांत में था। उन्होंने "गणित सार संग्रह" नामक ग्रंथ की रचना संस्कृत भाषा में की थी। गणितसार संग्रह ग्रंथ में 9 अध्याय हैं तथा 1131 लोकग्रंथ हैं।

लघुतम समापवर्त्य (LCM) ज्ञात करने की विधि देने वाले महावीराचार्य विश्व के प्रथम गणितज्ञ थे। संचय ज्ञात करने का सूत्र सर्व प्रथम महावीराचार्य ने दिया किन्तु इसे वर्तमान में हेरीगॉन 1634 ई. के नाम से जाना जाता है। ज्यामिति में त्रिभुज, चतुर्भुज, चाप आदि की सुस्पष्ट एवं सटीक व्याख्याएँ महावीराचार्य ने की हैं। ऐसे समकोण त्रिभुज की रचना करना जिसमें भुजाओं, क्षेत्रफल तथा परिगतवृत्त के व्यास सभी की माप पूर्ण संख्याएँ होती हैं। पाश्चात्य गणित इतिहास में इस प्रकार के त्रिभुज की रचना के संबंध में लियोनार्दो फिबोनाकी (1202 ई.) ने पहली बार विचार किया है। छिन्नक (Frustum) जैसे ठोसों के आयतन ज्ञात करने का सामान्य सूत्र दिया है।

3. भास्कराचार्य :–

भास्कराचार्य का जन्म विक्रम संवत् 1171 (सन् 1114 ई.) में विज्जडवीड नामक गांव में हुआ था। विज्जडवीड स्थान के विषय में कुछ लोगों का मत है कि यह बीजापुर कर्नाटक में है तथा कुछ लोगों का विश्वास है कि यह स्थान जलगांव महाराष्ट्र प्रांत में स्थित है। भास्कराचार्य के पिता का नाम महेश्वर था वे अपने पिता को ही अपना गुरू मानते थे। भास्कराचार्य उज्जैन गुरूकुल परम्परा के खगोलशास्त्री थे। गणित तथा खगोल शास्त्र पर इनके तीन ग्रंथ बहुत प्रसिद्ध हैं–

1. लीलावती – इस ग्रंथ में अंकगणित, ज्यामिति तथा क्षेत्रमिति हैं।
2. बीजगणितम्– इसमें बीजगणित एवं अनिधार्य समीकरणों का हल दिया है।
3. सिद्धांत शिरोमणि – यह खगोलशास्त्र का मानक ग्रंथ माना जाता है।

इन ग्रंथों की लोकप्रियता और उपयोगिता इस बात से प्रमाणित होती है कि इन ग्रंथों पर 4000 (चार हजार) से भी अधिक टीकाएँ उपलब्ध है। इनके ग्रंथ लीलावती और बीजगणितम वर्षों तक पाठ्यपुस्तक के रूप में पढ़ाए जाते रहे हैं।

अन्य महत्वपूर्ण बिन्दु भी यहाँ उल्लेखनीय हैं जैसे कालगणना के संबंध में उन्होंने सूक्ष्म विचार किया है। पृथ्वी की गुरूत्वाकर्षण शक्ति की संकल्पना इनके ग्रंथों में विद्यमान है। उन्होंने उज्जैन को शून्य रेखावृत्त माना है। ग्रहों के आकार, पृथ्वी से उनकी दूरी एवं ग्रहों की गति ज्ञान करने की विधियाँ भी उन्होंने दी हैं। चन्द्रमा स्वयं प्रकाशित नहीं है, चन्द्रमा पर से देखने पर पृथ्वी कहाँ दिखेगी, इस प्रकार के प्रश्न तथा उनका हल भी भास्कराचार्य ने दिया है।

उनका देहावसान 1179 ई. में हुआ। भास्कराचार्य के नाम से भारत ने अपने उपग्रह का नाम भास्कर रखा।

4. श्रीनिवास रामानुजन :-

महान गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन का जन्म 22 दिसम्बर सन् 1887 को तमिलनाडु के इरोड नगर में हुआ था। इनके पिता का नाम श्रीनिवास आयंगर था। इनकी माता का नाम कोमलताम्मल था। रामानुजन की गणित में विशेष रुचि थी। हाईस्कूल तक अपनी कक्षा में वे हमेशा प्रथम आये।

सन् 1913 में रामानुजन में कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय के प्रसिद्ध गणितज्ञ प्रो. जी.एच. हार्डी को एक पत्र लिखा और साथ में 120 प्रमेय भी भेजे। रामानुजन के कार्य से प्रभावित होकर प्रो. हार्डी ने उनको सन् 1914 में इग्लैण्ड बुला भेजा। रामानुजन को उनके शोधपत्र के आधार पर ही बिना परीक्षा दिये मार्च 1916 में बी.ए. की उपाधि प्रदान कर दी गई। इग्लैण्ड प्रवास में प्रो. हार्डी के साथ रामानुजन के 21 शोध पत्र प्रकाशित हुए। 6 दिसंबर 1917 को रामानुजन लन्दन में रॉयल सोसायटी के फैलो चुने गए। 27 मार्च 1919 को भारत वापस आने पर उनका भव्य स्वागत हुआ। रामानुजन अपना सारा गणितीय कार्य स्लेट-पट्टी पर करते तथा डायरी में उतार लेते थे। उनकी कृति के रूप में रामानुजन डायरी उपलब्ध है। इनका 26 अप्रैल 1920 को अल्पायु में देहावसान हो गया।